CAPITULO VI

Construcciones

Las construcciones geométricas interesan a jóvenes y adultos. A los niños les gusta hacer decoraciones para la mesa de sus fiestas de cumpleaños, de Navidad o de otras ocasiones especiales. Probablemente, el gusto por hacer canastos de papel, pegarles el asa, pintarles los lados, está estimulado por la ilusión de tener el canasto lleno de dulces en la fiesta. A medida que el niño crece la afición por las construcciones geométricas puede manifestarse en juegos con reglas, compases y transportadores, haciendo estrellas, tarjetas de saludo y, más tarde, construyendo cuerpos geométricos. Algunos adultos pasan del papel y la goma de pegar al tallado en madera y a los trabajos en metal. Otros, construyen modelos de trenes, barcos y aun ciudades completas. Unos pocos deciden desafiar a las autoridades matemáticas y tratan de resolver el problema clásico de trisectar un ángulo (Cap. VI, Secciones 6 a 8). El irresistible atractivo de las construcciones geométricas puede brindar muchas horas felices a jóvenes y adultos.

En este capítulo nos referiremos a construcciones en la geometría plana euclidiana. Aprenderemos (Cap. VI-4) que las construcciones clásicas que emplean solamente regla y compás pueden usarse para efectuar las cuatro operaciones racionales y la extracción de raíz cuadrada. Es así como —dada una recta cualquiera con un origen y un punto unidad para designar la unidad de distancia y el sentido positivo o dirección sobre la recta—, podemos asociar a los enteros positivos con puntos que resultan de agregar unidades sobre la recta; y los enteros negativos con puntos que resultan al

sustraer unidades; y los números racionales con puntos que resultan por multiplicación y división. En otras palabras, podemos construir sobre una recta el conjunto de puntos racionales respecto de un origen dado y del punto unidad. En general, dados el origen y el punto unidad, podemos construir todos los puntos sobre la recta, cuyas coordenadas se puedan expresar por medio de un número finito de números racionales, de operaciones racionales y de extracción de raíces cuadradas. Aún más, estos son los únicos puntos sobre la recta que pueden construirse a partir de los puntos dados empleando únicamente regla y compás (Cap. VI-3). En consecuencia, existen criterios algebraicos precisos para determinar si un punto dado sobre una recta puede construirse o no a partir del origen dado y con la unidad de longitud dada, mediante los métodos clásicos. Análogamente, existen criterios algebraicos para determinar si es posible o no construir una figura plana. Estos criterios algebraicos son la base de las consideraciones que haremos aquí sobre las construcciones geométricas en este estudio de los conceptos fundamentales del álgebra. Analizaremos las construcciones clásicas en el plano desde un punto de vista algebraico (Cap. VI, Secciones 3 y 4), aplicaremos nuestros conceptos algebraicos para demostrar la imposibilidad de tres famosos problemas clásicos de construcción (Cap. VI-6) y consideraremos varias construcciones no clásicas (Cap. VI, Secciones 7 y 8) de uno de estos problemas: la trisección de ángulos arbitrarios.

Este estudio de las construcciones geométricas desde un punto de vista algebraico permite vislumbrar las relaciones esenciales entre el álgebra (considerada como un estudio de conjuntos de números y variables y de sus relaciones entre sí) y la geometría (considerada como un estudio de conjuntos de puntos, rectas, planos, etc. y sus relaciones entre sí). En los fundamentos de las matemáticas hay teorías básicas y conceptos que se aplican indistintamente al álgebra o a la geometría. Nosotros no nos hemos empeñado en alcanzar este esencia común a todas las matemáticas. No obstante, esperamos que el estudio, en este capítulo, de las operaciones racionales, desde los puntos de vista algebraico y geométrico, y de la representación geométrica de ciertas funciones algebraicas corrientes —en el próximo capítulo—, contribuirán, en cierto modo, a que el lector aprecie la interdependencia entre el álgebra y la geometría.

VI-1 CONSTRUCCIONES CLASICAS.

Las construcciones geométricas pueden clasificarse en dos conjuntos, según sean los métodos e instrumentos que se empleen. Los griegos de la antigüedad se empeñaron en hacer todas las construcciones geométricas elementales usando solamente compás y regla. La regla puede usarse únicamente para trazar rectas. No está permitido utilizar el largo o el ancho de la regla, ni hacer marcas sobre ella. Nos referiremos a las construcciones que se atengan a estas restricciones con el nombre de *construcciones clásicas*. Las construcciones que se hacen con reglas graduadas, transportadores, mecanismos articulados, etc. (Cap. VI-9) se denominarán *construcciones no clásicas*.

Teóricamente, las construcciones hechas con regla y compás son absolutamente precisas. Sin embargo, en la práctica, no son ni más ni menos exactas que las construcciones con transportador y regla graduada. Muchos de los problemas que se consideran difíciles o imposibles sujetos a las restricciones clásicas son sencillos si se usan marcas sobre la regla, transportador, reglas paralelas, pantógrafo, trisector de ángulos, mecanismos articulados y otros recursos análogos. Birkhoff y Beatley consideran construcciones con regla graduada y transportador (Bibliografía Nº 6, págs. 165-171), así como también construcciones con regla y compás solamente (Bibliografía Nº 6, págs. 172-196). Fourrey (Bibliografía Nº 20), considera varios tipos de construcciones incluyendo construcciones sólo con regla, construcciones únicamente con compás y construcciones con regla y compás.

Para las construcciones, tanto clásicas como no clásicas, vamos a suponer que todos los puntos, rectas, etc., se encuentran en el mismo plano euclidiano. Para las construcciones clásicas daremos por aceptadas las cinco suposiciones siguientes:

(i) Por dos puntos dados cualesquiera se puede trazar una línea recta.

(ii) Se puede trazar un círculo que tenga por centro cualquier punto dado y por radio cualquier segmento de recta dado.

(iii) Es posible determinar la intersección de dos rectas dadas no paralelas cualesquiera.

(iv) Es posible determinar las intersecciones de cualquiera recta dada y de cualquiera circunferencia dada, en caso de que éstas existan.

(v) Es posible determinar las intersecciones de dos circunferencias dadas, siempre que éstas existan.

Toda construcción clásica debe consistir en un número finito de pasos por medio de regla y compás. Dado que las cinco suposiciones anteriores incluyen todos los pasos posibles con regla y compás, toda construcción clásica debe consistir en un número finito de pasos, en donde cada paso depende de una de las suposiciones anteriores.

EJERCICIOS

1. Formular suposiciones algebraicas equivalentes a cada una de las cinco suposiciones fundamentales de las construcciones clásicas.

2. Hacer las siguientes construcciones empleando únicamente una regla (Bibliografía Nº 20; págs. 3-24):

a) Dado un segmento de recta AB y una recta m paralela a AB, encontrar el punto medio del segmento AB.

b) Dadas dos rectas paralelas y un punto P, construir una recta paralela a las rectas dadas que pase por P.

c) Dadas las rectas $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$ de un sistema de coordenadas en un plano, construir o describir las construcciones de los puntos (2,0), (3,0), $(k,0)$, (0, 2), (0, 3), $(0, n)$, (k, n) en que k y n son enteros cualesquiera.

3. Hacer las siguientes construcciones usando únicamente compás (Bibliografía Nº 20; págs. 95-114):

a) Dados tres puntos en el plano, determinar si son o no colineales.

b) Dada una recta m y un segmento AB sobre ella, construir un segmento AF sobre m de una longitud igual a cinco veces la de AB.

c) Dados dos puntos cualesquiera A y B, construir, sin considerar la recta AB, un punto C colineal con AB de tal modo que la longitud de AC sea dos veces aquella de AB.

d) Dados los puntos (0, 0), (0, 1), (1, 0), ilustrar y describir una construcción para cualquier punto entero (k, n) como en el Ejercicio 2(c).

4. En el siglo XVIII, Mascheroni descubrió que cualquier punto que pudiera construirse empleando regla y compás, podía también construirse utilizando únicamente compás. Demostrar que las cinco construcciones fundamentales, que se dan por aceptadas en las construcciones clásicas, excepto la primera, pueden efectuarse empleando únicamente compás (Bibliografía Nº 13; págs. 140-152).

VI-2 CONSTRUCCIONES CLASICAS ELEMENTALES. Desde los tiempos de la antigüedad griega, los geómetras se han sentido atraídos por el gran número

de construcciones que pueden hacerse utilizando únicamente regla y compás, es decir, por las construcciones clásicas. Actualmente, la mayoría de los textos de geometría para la enseñanza media incluyen algunas construcciones clásicas elementales. En particular, el Nº 6 de la Bibliografía; págs. 172-196, contiene una muestra excelente de construcciones clásicas, que incluye a aquéllas que se presentan como ejercicios al final de esta sección. Estos ejercicios servirán, principalmente, como un repaso de las construcciones corrientes que se estudian en la escuela secundaria. En unos pocos casos se dan indicaciones. Algunas de estas construcciones pueden simplificarse mucho por medio de teoremas más avanzados de la geometría euclidiana. También resulta un buen ejercicio suplementario hacer las demostraciones geométricas o algebraicas de cada construcción. Aunque la lista de ejercicios es larga y pudo haber sido mucho más larga, hay también muchas construcciones que no son posibles empleando únicamente regla y compás. En las tres secciones siguientes estudiaremos los fundamentos algebraicos para determinar si es posible o no hacer una construcción determinada valiéndose únicamente de regla y compás.

EJERCICIOS

Hacer las construcciones siguientes utilizando únicamente regla y compás:

1. La simetral de un segmento de recta dado.
2. Un ángulo igual a un ángulo dado.
3. La bisectriz de un ángulo dado.
4. Una recta que pase por un punto dado y sea paralela a una recta dada.
5. Dividir un segmento de recta dado en n partes iguales.
6. Dividir un segmento de recta dado en partes proporcionales a k segmentos de recta dados.
7. La cuarta proporcional de tres segmentos de recta dados, es decir, construir n si $r/s = m/n$.
8. La perpendicular a una recta dada en un punto dado que se encuentre a) sobre la recta, y b) fuera de ella.
9. La media proporcional (medio geométrico) entre dos segmentos de recta dados; es decir, construir s si $m/s = s/n$.
10. La circunferencia que pase por tres puntos dados no colineales.
11. La circunferencia circunscrita a un triángulo dado.
12. La circunferencia inscrita en un triángulo dado.
13. El centro de una circunferencia, dado un arco de ella.

14. La tangente a una circunferencia dada en un punto dado.

15. Las tangentes a una circunferencia dada desde un punto fuera de ella.

16. Las tangentes exteriores comunes a dos circunferencias dadas, en el caso en que sea posible. (*Indicación:* Dadas dos circunferencias de centros *0, 0'* y de radios r y r' respectivamente, en que $r \geqq r'$, construir una circunferencia con centro de radio $r - r'$ y valerse del Ejercicio 15, tomando *0'* como punto exterior).

17. Las tangentes interiores comunes a dos circunferencias dadas, en el caso de que existan. (*Indicación:* Esta construcción puede hacerse de manera análoga a la empleada en el Ejercicio 16, construyendo primero una circunferencia de radio $r + r'$ en torno de *0*).

18. Un triángulo que tenga tres lados dados.

19. Un triángulo que tenga dos lados y el ángulo comprendido dados.

20. Un triángulo que tenga dos ángulos y un lado dados. (*Indicación:* Dados dos ángulos cualesquiera de un triángulo, el tercer ángulo puede encontrarse valiéndose del hecho de que en la geometría euclidiana, la suma de tres ángulos de un triángulo es un ángulo extendido).

21. Un triángulo (no es siempre único) que tenga dados dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.

22. Trisectar un ángulo recto.

23. Inscribir polígonos regulares de tres, seis y doce lados en una circunferencia dada.

24. Inscribir polígonos regulares de cuatro, ocho y dieciseis lados en una circunferencia dada.

25. Inscribir polígonos de cinco y diez lados en una circunferencia dada.

26. Inscribir un polígono regular de quince lados en una circunferencia dada. [*Indicación:* valerse de un lado o del ángulo del centro de un exágono (seis lados) regular inscrito y lo mismo de un decágono (diez lados) regular inscrito].

27. Circunscribir a una circunferencia dada polígonos regulares de tres, cuatro, cinco, seis, ocho, diez y doce lados.

VI-3 EL PUNTO DE VISTA ALGEBRAICO. Los geómetras griegos idearon muchas construcciones con regla y compás. Sin embargo, trataron en vano de resolver mediante construcciones clásicas problemas tales como la duplicación de un cubo, la cuadratura de un círculo, y la trisección de un ángulo (Cap. VI-6). Durante el siglo diecinueve se dieron demostraciones algebraicas para probar que estos tres problemas no pueden resolverse exclusivamente con regla y compás (Cap. VI-6). Sin embargo, pueden resolverse, mediante construcciones no clásicas. En general, el criterio algebraico o analítico sobre las posibilidades de construcción (Cap. VI-4 y Cap. VI-5) per-

mite determinar exactamente qué problemas de construcción clásicos tienen solución, es decir, qué problemas de construcción se pueden resolver valiéndose únicamente de regla y compás. Por ejemplo, las consideraciones algebraicas llevaron a la construcción clásica de un polígono regular de 17 lados cuya posibilidad de construcción de acuerdo con las restricciones clásicas, ni siquiera se sospechó durante los veinte siglos transcurridos desde los tiempos de Euclides hasta la época de Gauss (Bibliografía Nº 15, pag. 353).

Las proposiciones algebraicas correspondientes a las cinco suposiciones formuladas en el Cap. VI-1, son:

(i′) Se puede determinar la ecuación de una recta que pasa por dos puntos dados.

(ii′) Es posible establecer la ecuación de una circunferencia que tenga un centro y un radio dados.

(iii′) Es posible determinar las coordenadas del punto de intersección de dos rectas dadas cualesquiera no paralelas.

(iv′) Es posible determinar las coordenadas de los puntos de intersección de una recta dada y de una circunferencia dada, en el caso de que estos puntos existan.

(v′) Es posible determinar las coordenadas de los puntos de intersección de dos circunferencias dadas, en caso de que éstos existan.

Todos los resultados anteriores pueden hallarse algebraicamente empleando coordenadas cartesianas ortogonales, las cuatro operaciones racionales y la extracción de raíces cuadradas reales; e inversamente, sólo pueden resolverse por medio de regla y compás problemas que sean algebraicamente equivalentes a los citados anteriormente. Por lo tanto, existe un criterio algebraico para determinar si alguna construcción particular puede o no realizarse empleando únicamente regla y compás. Estos criterios se formulan más fácilmente mediante las cuatro operaciones racionales y la extracción de raíces cuadradas. En la sección siguiente consideraremos construcciones clásicas bien determinadas, las *construcciones clásicas básicas* que pueden utilizarse para efectuar estas cinco operaciones.

VI-4 CONSTRUCCIONES CLASICAS BASICAS. Acabamos de señalar que toda construcción clásica posible debe ser equivalente algebraicamente a un número finito de pasos en que se usen sólo las cuatro operaciones racio-

nales y la extracción de raíces cuadradas. Ahora vamos a verificar que estas cinco operaciones pueden realizarse utilizando únicamente regla y compás.

Dados los segmentos de recta de longitud m y n, respectivamente, podemos construir fácilmente segmentos de longitud m, n, $m + n$, y $m - n$ sobre cualquiera recta dada. Si se da además un segmento de longitud igual a la unidad, podemos construir segmentos de longitud mn y m/n como en la Fig. VI-1. Estas dos cons-

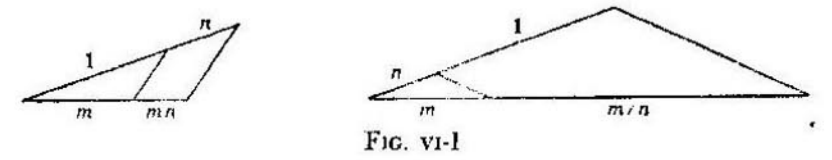


Fig. VI-1

trucciones se basan en que una recta paralela a un lado de un triángulo divide a los otros dos lados en la misma razón. Por consiguiente, tenemos las proporciones $mn : m = n : 1$ y $m : (m/n) = n : 1$, respectivamente, en los triángulos de la Fig. VI-1. Después de esto, podemos sumar, sustraer, multiplicar y dividir segmentos de recta en el sentido que hemos señalado, utilizando únicamente regla y compás, es decir, se pueden efectuar las cuatro operaciones racionales por medio de construcciones clásicas.

La extracción de raíz cuadrada es un caso especial de hallar el medio geométrico o la media proporcional (Ejercicio 9, Cap. VI-2). La demostración de esta construcción clásica se basa en que cualquier triángulo inscrito en una semicircunferencia es un triángulo rectángulo. Así el $\triangle ABC$ en la Fig. VI-2 es un triángulo rectángulo. El segmento CD es perpendicular a AB en D, siendo $AD = m$ y $DB = n$. Luego, los triángulos ADC y CDB son semejantes y $AD/CD = CD/DB$, de donde $CD = \sqrt{mn}$. El caso especial $\sqrt{m}$ en que estamos empeñados, pueden efectuarse haciendo $n = 1$) para cualquier segmento de recta dado de longitud m mediante los métodos clásicos si se da un segmento de longitud igual a la unidad (o bien, se puede obtener de los datos dados mediante los métodos clásicos).

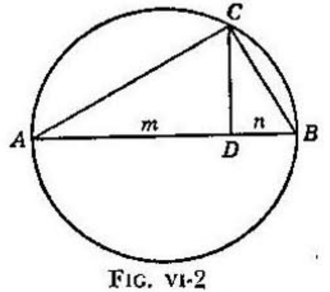


Fig. VI-2

Dado un segmento de longitud igual a la unidad y segmentos m y n, podemos construir segmentos $m + n$, $m - n$, $m \cdot n$, m/n y $\sqrt{mn}$, es decir, hemos verificado ahora que, dado un segmento de longitud igual a la unidad, pueden combinarse segmentos de recta dados cualesquiera por medio de las cuatro operaciones racionales y de la extracción de raíz cuadrada empleando únicamente regla y compás. A la inversa, dado que toda construcción clásica debe constar de un número finito de aplicaciones de las cinco suposiciones fundamentales (Cap. VI-1) y cada una de ellas debe efectuarse por medio de las cuatro operaciones racionales y la extracción de raíces cuadradas, hemos demostrado que toda construcción clásica debe constar de un conjunto finito de construcciones clásicas básicas. Ahora bien, definiremos una *figura geométrica plana* como cualquier conjunto de puntos y rectas en un plano, y obtenemos el

TEOREMA VI-1. *Es posible construir una figura geométrica plana por medio de regla y compás si y sólo si las coordenadas cartesianas ortogonales de sus puntos (vértices, etc.) pueden obtenerse de aquéllas de la figura dada, mediante un número finito de operaciones racionales y extracciones de raíces cuadradas reales.*

Todos los números racionales y expresiones, tales como $\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$ pueden construirse con regla y compás una vez que se haya elegido una unidad. La expresión citada es la longitud de un lado de un pentágono regular inscrito en un círculo de radio dos. En la sección que sigue veremos que toda expresión susceptible de construirse como aquélla es una raíz de una ecuación irreducible con coeficientes enteros de grado igual a una potencia entera de 2.

EJERCICIOS

1. Dado un segmento como unidad, construir segmentos de longitudes iguales a 3, $\frac{3}{4}$, 2, $2 + \sqrt{5}$, $\sqrt{3 + \sqrt{2}}$.
2. Dividir un segmento de recta dado en cinco partes iguales
3. Dividir un segmento de recta dado en partes proporcionales a tres segmentos de recta dados.
4. Construir una estrella de cinco puntas.

5. Construir un exágono regular, dado su lado.

6. Dado un triángulo obtusángulo, construir las circunferencias inscrita y circunscrita.

7. Hacer una demostración algebraica de la construcción de un decágono regular (Bibliografía Nº 13; págs. 122-123), (Bibliografía Nº 6; págs. 191-194).

8. Dado el eje x, el origen y el punto $(1,1)$ en un plano, construir los puntos: a) $(4,0)$; b) $(-\frac{1}{2}, 0)$; c) $(-5 + \sqrt{2}, 0)$; d) $(2,3)$; e) $(\sqrt{3}, \sqrt{5})$.

9. Id. al Ejercicio 8, construir los gráficos de a) $x = 5$; b) $2x + 3y = 6$; c) $\sqrt{3}x + 4y = 2\sqrt{3}$.

10. Demostrar que el gráfico de cualquier recta con coeficientes constructibles puede ser construída por los métodos clásicos.

11. Demostrar que cualquiera circunferencia

$$x^2 + y^2 + bx + dy + e = 0$$

cuyos coeficientes pueden construirse, puede también construirse.

VI-5 CONSTRUCCIONES DE RAICES DE ECUACIONES. Toda ecuación lineal tiene una raíz que puede expresarse por medio de los coeficientes, empleando únicamente operaciones racionales. En consecuencia, cualquiera ecuación lineal con coeficientes susceptibles de construirse tiene una raíz que es posible construir y que se representa por un número. Se dice que este número es constructible si es posible obtener el segmento de recta correspondiente de los datos dados, cualesquiera sean las restricciones que se hayan establecido. En esta sección nos dedicaremos a números cuya construcción es posible únicamente con regla y compás.

Cualquiera ecuación cuadrática puede escribirse en la forma

$$\text{(VI-1)} \qquad x^2 - ax + b = 0$$

Las raíces de esta ecuación son precisamente (Bibliografía Nº 15; págs. 355-356) las intersecciones con el eje x, de la circunferencia

$$\text{(VI-2)} \qquad \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b+1}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + (b-1)^2}{4},$$

que queda reducida a

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} - b$$

cuando $y = 0$. Cualquiera ecuación cuadrática con coeficientes susceptibles de construirse puede expresarse en la forma (VI-1), donde a y b son constructibles. Las coordenadas del centro y el

radio de la circunferencia (VI-2) son, por lo tanto, susceptibles de construir. En consecuencia, las raíces reales de cualquiera ecuación cuadrática con coeficientes susceptibles de construir pueden construirse siempre que tales raíces reales existan. Ya hemos demostrado

TEOREMA VI - 2. *Si los coeficientes de una ecuación lineal o cuadrática pueden construirse basándose sobre los datos dados empleando únicamente regla y compás, entonces las raíces reales de la ecuación pueden construirse empleando únicamente regla y compás.*

Consideraremos en seguida unos cuantos resultados de ecuaciones de grado mayor que dos. Sin embargo, no intentaremos exponer una teoría completa sobre estas ecuaciones.

En el anillo de los polinomios con coeficientes enteros (Cap. III - 2) un polinomio dado $p(x)$ es reducible dentro del anillo de los enteros (Cap. III - 6) si y sólo si puede expresarse en la forma $p(x) = q(x) \cdot r(x)$, en donde $q(x)$ y $r(x)$ son polinomios de grado positivo con coeficientes enteros. En particular, cualquier polinomio no lineal con coeficientes enteros y una raíz racional es reducible dentro del anillo de los enteros. Si una ecuación irreducible $f(x) = 0$ con coeficientes racionales tiene una raíz susceptible de construirse r, esto significa que tiene una raíz que puede expresarse por medio de las operaciones racionales y la extracción de raíces cuadradas. Luego (según teorías más avanzadas de álgebra) todas las raíces de $f(x) = 0$ son conjugadas de r y pueden obtenerse de r exactamente como $1 - \sqrt{2}$ puede obtenerse de $1 + \sqrt{2}$. Por ejemplo, el número $\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$ que se mencionó al final del Cap. VI - 4 es una raíz de $x^4 - 20x^2 + 80 = 0$. Esta ecuación tiene las raíces $\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$, $\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$, $-\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$, $-\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$. En general, el grado de cualquiera ecuación irreducible que tenga una raíz real susceptible de construir debe ser de la forma $d = 2^k$, en donde k es un entero no negativo. Esto resulta evidente intuitivamente, ya que cualquiera raíz racional es una raíz de una ecuación irreductible de grado $1 = 2^0$ y cualquiera raíz irracional susceptible de construirse es una de entre un número par de raíces conjugadas (incluyendo ella misma) que resulta de la raíz dada al considerar cada uno de los radicales alternadamente como positivos y negati-

vos. Sea $f(x) = 0$ una ecuación polinomia con coeficientes racionales que tenga precisamente como raíces las 2^m conjugadas obtenidas de esta manera. Luego $f(x)$ tiene grado 2^m. Sin embargo, con este método de calcular las raíces conjugadas puede ocurrir que algunas raíces se cuenten más de una vez, como por ejemplo, cuando el número dado cuya construcción es posible, es

$$\sqrt{5 - \sqrt{2} + \sqrt{3}} + \sqrt{5 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}.$$

En estos casos puede demostrarse (Bibliografía Nº 30; págs. 5-12) que toda raíz se cuenta exactamente s veces, para algún s entero positivo, siendo s divisor de m, y que si $g(x) = 0$ es una ecuación polinomia irreducible con coeficientes racionales que tiene como raíz el número dado que es susceptible de construir, entonces $g(x) = 0$ tiene como raíces las raíces distintas de $f(x) = 0$ y $f(x) = c[g(x)]^s$, siendo c una constante. Por lo tanto, el grado d de $g(x)$ satisface la relación $d^s = 2^m$, de donde $d = 2^k$ para algún entero positivo k. Como consecuencia de este resultado tenemos

TEOREMA VI - 3. *Una ecuación polinomia irreductible con coeficientes racionales y de grado d, en que d no pueda expresarse como una potencia entera de 2, no tiene ninguna raíz que pueda construirse valiéndose únicamente de regla y compás con la unidad de longitud dada.*

Nótese que no se pueden construir todas las raíces reales de las ecuaciones polinomias irreducibles con coeficientes racionales y de grado 2^m para todo entero m (Cap. IV - 5). Al estudiar algunos de los problemas clásicos de construcción en el Cap. VI - 6, nos servirá mucho el Teorema VI - 3.

EJERCICIOS

1. Hacer una lista de cinco números irracionales constructibles.

2. Elegir un segmento de recta como unidad y construir los números de la lista hecha en el Ejercicio 1.

3. Indicar el conjunto de conjugados asociados con cada uno de los números dados en el Ejercicio 1.

4. Indicar una ecuación irreductible con coeficientes enteros para cada número del Ejercicio 1 y que tenga el número dado como raíz.

5. Dado un sistema de coordenadas, construir las raíces de las siguientes ecuaciones:

a) $3x - 5 = 0$;
b $x^2 - 6x - 1 = 0$;
c) $2x^2 + 5x - 3 = 0$;
d) $x^4 + 3x^2 - 1 = 0$.

6. Encontrar los conjugados distintos de cada uno de los siguientes números:

$$1 + \sqrt{2}, \quad 2 - \sqrt{3 + \sqrt{2}}, \quad \sqrt{1 + \sqrt{2 - \sqrt{1 - \sqrt{2}}}}.$$

7. Hallar una ecuación irreducible con coeficientes enteros que se satisfaga con cada uno de los números dados en el Ejercicio 6.

8. Dar ejemplos de tres ecuaciones polinomias con coeficientes enteros que no puedan resolverse gráficamente utilizando únicamente regla y compás.

9. Se puede demostrar (Bibliografía Nº 15; pág. 379) que un polígono regular de n lados puede construirse usando únicamente regla y compás, si y sólo si

$$n = 2^k p_1 p_2 \cdots p_m,$$

en que los p_j son números primos distintos de la forma $2^{2^t} + 1$. Indicar en la fórmula anterior todos los valores de $n \leqq 30$ tales que un polígono regular de n lados pueda construirse mediante regla y compás. (Gauss fue el primero en descubrir una fórmula para este resultado cuando él era aún muy joven y este hecho influyó grandemente en su decisión de consagrar su vida a las matemáticas).

VI - 6 PROBLEMAS DE CONSTRUCCION FAMOSOS.

Hay tres problemas clásicos de construcción que han constituido un desafío para los geómetras durante muchos siglos: la construcción de un cubo cuyo volumen sea el doble de aquél de un cubo dado (la "duplicación" de un cubo), la construcción de un cuadrado cuya área sea igual a aquélla de un círculo dado (la "cuadratura" de un círculo), y la trisección de cualquier ángulo dado. Estos problemas fueron conocidos por los griegos de la antigüedad y aún hoy día se proponen soluciones de ellos. No obstante, en la actualidad podemos valernos de criterios algebraicos (Cap. VI - 3 y Cap. VI - 5) para establecer que es imposible resolver estos problemas conforme a las restricciones clásicas. En las Secciones 7 y 8 de este Capítulo VI examinaremos unos cuantos métodos no clásicos para resolver el problema de la trisec-

ción y haremos notar la manera en que cada solución contraviene las restricciones clásicas.

Construcción de un cubo cuyo volumen sea el doble de aquél de un cubo dado. Este problema es llamado a veces *problema de Delos.* De acuerdo con la tradición, este problema surgió cuando el oráculo de Delos aconsejó a los atenienses que duplicaran la medida del altar de Apolo. Si se elige como unidad de longitud la arista del cubo dado, se necesita construir un segmento de recta de longitud x tal que $x^3 = 2$. La ecuación $x^3 - 2 = 0$ es irreducible en el anillo de los polinomios con coeficientes enteros, ya que según el Teorema IV - 9 no tiene una raíz racional, luego, según el Teorema VI - 3, no tiene una raíz susceptible de construirse. En consecuencia, no es posible construir $x = \sqrt[3]{2}$ y el problema de Delos no puede resolverse empleando únicamente regla y compás. El problema puede resolverse fácilmente por métodos no clásicos. Por ejemplo, podemos hacer el gráfico de la curva $y = x^3$ y hallar su intersección con la recta $y = 2$.

Construcción de un cuadrado cuya área sea igual a aquélla de un círculo dado. Si elegimos como unidad de longitud el radio de un círculo dado, el problema se reduce a la construcción de una raíz de la ecuación $x^2 = \pi$, lo que sólo es posible si el número trascendente (Cap. I - 10) π es susceptible de construirse. A continuación observamos que según las limitaciones clásicas todo número susceptible de construirse es algebraico (Cap. I - 10) y por lo tanto, ningún número trascendente puede construirse valiéndose únicamente de regla y compás. Dado que de acuerdo a las restricciones clásicas todo número susceptible de construirse puede expresarse por medio de números enteros empleando las operaciones racionales y la extracción de raíces cuadradas, todo número cuya construcción es posible satisface una ecuación polinomia con coeficientes enteros y en consecuencia es un número algebraico. Es así como el número trascendente $\sqrt{\pi}$ no es constructible por medio de los métodos clásicos, y la construcción de un cuadrado cuya área sea igual a aquélla de un círculo dado no puede realizarse empleando únicamente regla y compás.

En 1882, Lindemann demostró, por primera vez, que π es un número trascendente. No obstante, las construcciones no clásicas de π se conocen desde hace muchos siglos (Bibliografía N° 30; págs. 55-80). Hacia el año 400 a. J. C. Hipias de Elis hizo una

construcción no clásica de una curva conocida con el nombre de cuadratriz (Bibliografía Nº 55; págs. 19-20), que podía usarse para obtener π y para trisectar cualquier ángulo. Brevemente, dado un cuadrante de un círculo OAB, como en la Fig. VI - 3, se considera un punto Q que se mueve con velocidad constante a lo largo del arco AB y un punto R que se mueve con velocidad constante a lo largo del radio OB de tal modo que los dos puntos parten simultáneamente de A y O, respectivamente, y llegan simultáneamente a B. En cualquier instante t_i podemos designar las posiciones de los puntos por R_i y Q_i. El lugar geométrico BPD de la intersección de radio OQ_i y de la recta correspondiente paralela a OA que pasa por R_i constituye la *cuadratriz*. La cuadratriz puede obtenerse también deslizando el punto R a lo largo de la recta OB a una velocidad constante y haciendo girar el círculo en torno de O a una velocidad constante.

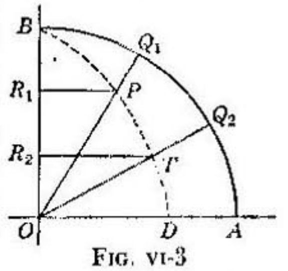


FIG. VI-3

La ecuación de la cuadratriz puede obtenerse de las relaciones

$$\text{(VI - 3)} \qquad y = ct, \qquad \text{arc tg } y/x = kt,$$

en que $P:(x, y)$ es un punto general de la cuadratriz y t indica el tiempo en que las partículas Q y R han estado en movimiento. Elijamos la unidad de tiempo de modo que a medida que R se mueva desde O hasta B, t varíe de 0 a 1. Luego $\pi/2 = k$, e $y/x = \text{tg } \pi t/2$ es una ecuación de la cuadratriz. Si elegimos también la unidad de longitud de modo que $OB = 1$, tenemos que $1 = c$, de donde $y = t$ y $x = t/\text{tg } (\pi t/2)$. Si $t = 0$, esta relación puede usarse para obtener $OD = 2/\pi$ por medio de los métodos que se estudian en cálculo para tratar fórmulas indeterminadas. En consecuencia, $2/\pi$ y por lo tanto, π puede construirse por medio de la cuadratriz, regla y compás.

La trisección de un ángulo dado. Este problema es aún muy popular por cuanto todavía se proponen soluciones casi todos los años. Estas soluciones son inevitablemente construcciones no clásicas, aunque a menudo no sea esa la intención. Consideraremos primeramente una demostración algebraica de la imposibilidad del problema de la trisección conforme a las restricciones clásicas

y en seguida (Cap. VI - 7 y Cap. VI - 8) consideraremos unas cuantas soluciones no clásicas.

La demostración corriente para probar que existe por lo menos un ángulo que no puede trisectarse por medio de los métodos clásicos se vale de unas pocas identidades trigonométricas y de un ángulo de 120°. Dado un ángulo de 120° buscamos un ángulo de 40°. La construcción de un ángulo de 40° es equivalente a la construcción de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es la unidad y su base es cos 40°. De esta manera un ángulo de 120° puede trisectarse si y sólo si se puede construir un segmento de recta de longitud cos 40°. De $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$ y de la identidad trigonométrica

$$4 \cos^3 x - 3 \cos x = \cos 3x,$$

podemos obtener la relación

$$4 \cos^3 40^\circ - 3 \cos 40^\circ + \tfrac{1}{2} = 0.$$

Haciendo $y = \cos 40^\circ$, tenemos

$$4y^3 - 3y + \tfrac{1}{2} = 0.$$

Multiplicando por 2 y haciendo la sustitución $z = 2y$, resulta

$$z^3 - 3z + 1 = 0$$

esta ecuación no tiene raíces racionales (Teorema IV - 9) y por consiguiente es irreducible en el anillo de los polinomios con coeficientes enteros. Luego, según el Teorema VI - 3, su raíz no puede construirse y $z = 2 \cos 40^\circ$ no es constructible, es decir, un ángulo de 120° no puede trisectarse y el problema de la trisección no es posible conforme a las restricciones clásicas.

La demostración anterior mediante los Teoremas IV - 9 y VI - 3, de que ninguna raíz z es susceptible de construirse puede expresarse también de una manera más sencilla, como sigue: Las únicas raíces racionales posible de la ecuación $z^3 - 3z + 1 = 0$ deben ser enteros, dado que el coeficiente principal es la unidad y cualquiera raíz racional debe ser divisor del término constante. Por lo tanto, las únicas raíces racionales posibles son $+1$ y -1. Dado que ninguno de estos enteros es una raíz, la ecuación no tiene raíces racionales. Si la ecuación tuviera una raíz expresable por medio de irracionales cuadráticos tal como $a + b\sqrt{2}$, tendría

también como raíz al irracional conjugado $a - b\sqrt{2}$ y la raíz restante (la tercera) sería racional. Dado que cualquier número cuya construcción es posible mediante los métodos clásicos puede expresarse por medio de enteros utilizando un número finito de operaciones racionales y la extracción de raíces cuadradas, todo número no racional susceptible de construirse forma parte de un conjunto de un número par de conjugados (incluso él mismo) (Cap. VI - 5). Por lo tanto, cualquiera ecuación con coeficientes enteros que tenga una raíz irracional susceptible de construirse, debe tener un número par de raíces irracionales. En particular, cualquiera ecuación cúbica con coeficientes enteros que tenga por lo menos una raíz irracional susceptible de construirse debe tener exactamente dos raíces irracionales y una raíz racional. En consecuencia, si la ecuación cúbica citada no tiene ninguna raíz racional, esto implica que no tiene ninguna raíz susceptible de construirse. Como en el caso anterior, esto implica que un ángulo de 120° no puede trisectarse, de donde se deduce que no todo ángulo puede trisectarse y que el problema de la trisección no puede resolverse usando únicamente regla y compás. En las dos secciones que siguen consideraremos unos cuantos métodos no clásicos para trisectar ángulos y veremos en qué contravienen las restricciones clásicas.

EJERCICIOS

1. ¿Es posible dividir un ángulo arbitrario en siete partes iguales conforme a las restricciones clásicas? Explicar.

2. Indicar una construcción clásica de dieciséis puntos cualesquiera de la elipse

$$x^2/4 + y^2 = 1.$$

3. ¿Se puede hacer el gráfico completo de la elipse del Ejercicio 2 conforme a los métodos clásicos? Explicar.

4. Proponer una construcción no clásica de la elipse del Ejercicio 2.

5. Formular las condiciones necesarias y suficientes que deben cumplir los coeficientes de la ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ para que pueda dibujarse el gráfico completo de la ecuación utilizando únicamente regla y compás (Cap. VII-3).

VI-7 TRISECCIONES GEOMETRICAS NO CLASICAS.

En una de las más antiguas y más sencillas construcciones de la trisección de ángulos se desestima la limi-

tación clásica de que no debe usarse marcas en la regla. Esta construcción se atribuye a Arquímedes. Necesita solamente compás y una regla con dos marcas en ella. Una regla graduada servirá muy bien.

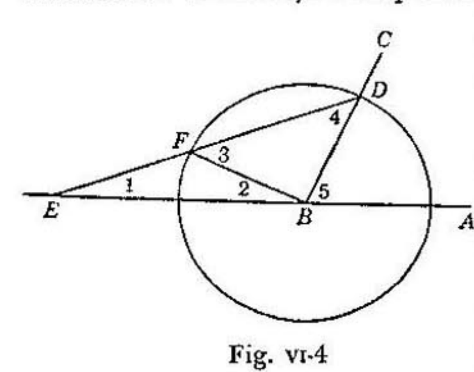


Fig. VI-4

Dado cualquier ángulo agudo ABC (Fig. VI-4) constrúyase una circunferencia de radio r en torno al vértice B. Sea D la intersección de la circunferencia con el lado BC. Prolónguese el lado AB más allá de B. Márquese en la regla la longitud $r = BD$. En seguida manténgase la regla sobre D y deslícese una marca a lo largo de la prolongación de AB hasta que la otra marca toque a la circunferencia en algún punto F. Trácese DF y prolónguese hasta que corte a AB en E. Entonces $<BEF = \frac{1}{3} <ABC$. Esto se demuestra como sigue: Trácese BF y desígnese los ángulos como en la Fig. VI-4. Entonces $EF = FB = BD = r$, $<1 = <2$, $<3 = <4$. Dado, que <3 es un ángulo exterior del triángulo BEF y <5 es un ángulo exterior del triángulo BED, tenemos $<3 = <1 + <2 = <1 + <1$; $<5 = <1 + <4 = <1 + <3 = <1 + <1 + <1$, y por consiguiente $<ABC = <3\ BEF$. Esta no es una solución clásica del problema de la trisección, ya que se emplean marcas sobre la regla.

Hipias de Elis hacia el año 400 A. C. (Cap. VI-6) ideó otra solución no clásica del problema de la trisección. Este método se vale de la cuadratriz (Fig. VI-3). De las relaciones (VI-3), tenemos

$$<AOQ_2 : <AOQ_1 = OR_2 : OR_1$$

de donde el ángulo AOQ_1 puede trisectarse haciendo $OR_2 = \frac{1}{3} OR_1$, R_2T paralela a OA, y trazando OTQ_2. Entonces $<AOQ_2 = \frac{1}{3} <AOQ_1$. Esta solución del problema de la trisección no satisface las restricciones clásicas dado que la cuadratriz no puede dibujarse exactamente mediante los métodos clásicos.

Varias soluciones que se han propuesto para el problema de la trisección constan de una sucesión de pasos en que se trazan rectas

tan cerca como se desee de las rectas pedidas que trisectarían al ángulo. Estas soluciones no satisfacen las restricciones clásicas, dado que se deben trazar las rectas pedidas en un número finito de pasos.

La popularidad del problema de la trisección se manifiesta en el número siempre creciente de inventores de métodos para trisectar ángulos. El *Chicago Sun* del 5 de enero de 1948, publicaba un artículo titulado "¿Trisectar un ángulo? Sencillo . . . El insiste". La construcción descrita en el artículo se vale de un círculo de diámetro igual al ancho de la regla empleada, coloca el ángulo superior izquierdo de la regla a lo largo de cierta recta, y manipula la regla hasta que el ángulo superior derecho toque a otra recta. Aunque esta construcción no utiliza marcas sobre la regla, se vale del ancho fijo de la regla, lo que es contrario a las limitaciones clásicas que se imponen al problema (Cap. VI - 1).

La aparición frecuente de métodos para trisectar ángulos pone de relieve el hecho de que matemáticos y profesores aún no han logrado difundir la realidad sobre el problema de la trisección, es decir, que este problema tiene fácil solución por métodos no clásicos, pero que no puede resolverse sujeto a las restricciones clásicas.

Hay muchas otras construcciones no clásicas para resolver el problema de la trisección (Bibliografía Nº 55). Varias de éstas se valen de curvas, tales como el gráfico de

$$x^3 + xy^2 + ay^2 - 3ax^2 = 0,$$

(Fig. VI-5) que no pueden construirse empleando únicamente regla y compás. La curva de la figura VI-5 se denomina la Trisectriz de Maclaurin y puede usarse para triscetar cualquier ángulo. Dada una Trisectriz de Maclaurin y cualquier ángulo ABC, trácese una recta m por el punto (2a, 0) que forme un ángulo igual al ángulo dado en el eje positivo de las x. Encuéntrense las tres intersecciones P_1, P_2, P_3 de la recta m con la curva dada. Una de las rectas P_iO, donde O es el origen, forma un ángulo con el eje positivo de las x igual a un tercio del ángulo dado. No es difícil determinar cuál de las tres rectas P_iO debe usarse, ya que se puede

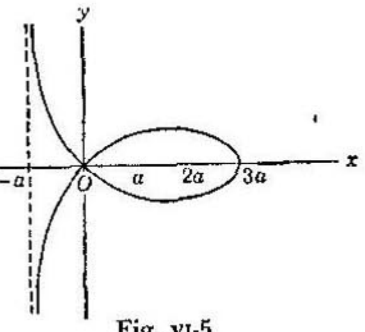


Fig. VI-5

comparar rápidamente tres veces cada uno de los tres ángulos obtenidos con el ángulo dado. Este método de trisectar ángulos se trata en muchos textos de geometría analítica. No se atiene a las limitaciones clásicas impuestas al problema en cuanto emplea una curva que no puede construirse usando únicamente regla y compás.

Ya hemos considerado varias construcciones no clásicas para resolver el problema de la trisección y hemos hecho notar la forma en que cada método contraviene las restricciones clásicas impuestas sobre el problema. En la sección siguiente estudiaremos unos cuantos trisectores mecánicos.

EJERCICIOS

1. Valiéndose de la construcción de Arquímedes y del Ejercicio 22, Cap. VI-2, encontrar un método para trisectar ángulos de cualquier medida.

2. Dibujar ángulos de aproximadamente 80°, 150°, 250°, 300° y 350°. Trisectar cada uno de los ángulos que se acaba de dibujar.

3. Describir e ilustrar la solución no clásica de Pappus del problema de la trisección, utilizando regla, compás, y la construcción de una hipérbola (Bibliografía Nº 55; págs. 22-23).

VI-8 TRISECTORES DE ANGULO MECANICOS.

Hay varias clases de trisectores mecánicos de ángulo que varían en complejidad desde la tapa de una lata de café con dos varillas prendidas (Bibliografía Nº 4) hasta los polígonos articulados (sistemas de varillas unidas entre sí por ejes de articulación) en cuya construcción hay que efectuar mediciones muy cuidadosas.

El trisector de ángulo sencillo que citamos anteriormente puede hacerse con cualquier disco circular. Es una variante del tomahawk* (Bibliografía Nº 55; pág. 37). Sea r el radio del disco y O el centro. Préndase firmemente al disco, una varilla OPQ de longitud $2r$. En seguida préndase una segunda varilla PT tangente al disco en P (Fig. VI-6). Este invento puede usarse para trisectar cualquier ángulo dado ABC resbalando TP por B hasta que el disco esté tangente a un lado del ángulo dado, digamos en E, y Q se encuentre en el otro lado (Fig. VI-7). Los triángulos rectán-

*Especie de hacha de los indios (EE. UU.). N. de la T.

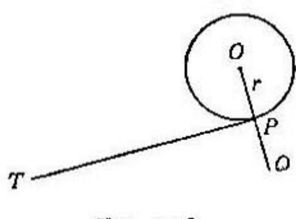


FIG. VI-6

gulos *QBP, OBP* y *OBE* son congruentes, luego las rectas *BP* y *BO* trisectan el ángulo dado.

Un sencillo trisector de ángulos hecho de cuatro varillas de madera (Bibliografía Nº 5) está basado en la construcción de Arquímides (Cap. VI-7). Otro tipo de trisector de ángulo, el isoclinóstato de Sylvester (Fig. VI-8) consiste en cuatro varillas *(OA, OC, OE y OG)* sujetas juntas por un eje en uno de sus extremos y unidas por un sistema de varillas más cortas que mantienen iguales a los ángulos formados por las varillas largas (Ejercicios 1, Cap. VI-9). Debido a que este tipo de mecanismo podía usarse para dividir un ángulo en cualquier número de partes iguales se denominó "isoclinóstato". Se puede colegir la procedencia de la idea original de Sylvester para este mecanismo de la cita siguiente extraída del título del impreso en que se publicó por primera vez: "Sobre el Abanico de una Dama, . . .".

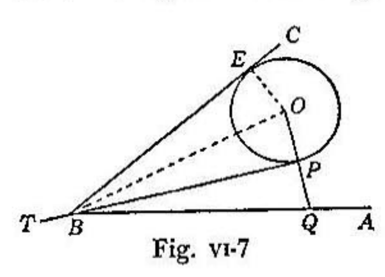


Fig. VI-7

Otro trisector de ángulo (polígono articulado) fue inventado por un abogado de Londres, Alfredo Bray Kempe, en 1877. Kempe se interesó en estos mecanismos después de oír la conferencia de Sylvester sobre este tema. Su trisector de ángulo (Fig. VI-9) se basa en el uso de paralelógramos invertidos (cuadriláteros de lados opuestos iguales y con un par de lados opuestos que se cruzan entre sí) semejantes,

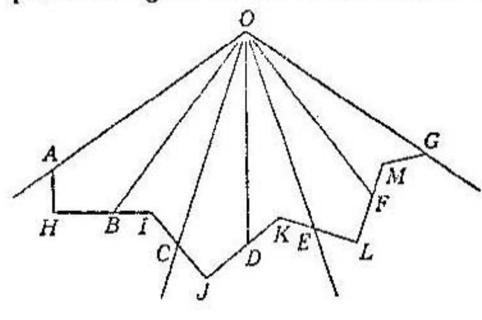


FIG. VI-8

$$ABCD \sim ADEF \sim AFGH,$$

y puede usarse para cualquier ángulo menor que una revolución completa.

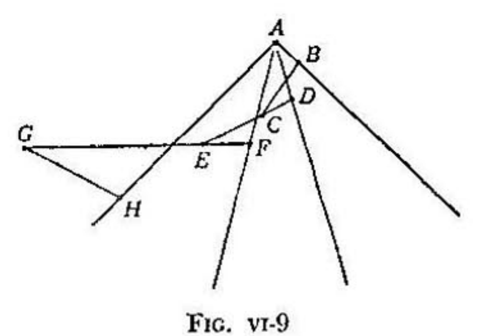


FIG. VI-9

Hasta aquí hemos demostrado que el problema de la trisección clásica es imposible y hemos visto que empleando un transportador, un polígono articulado, una regla marcada, una curva adecuada, etc., el problema de la trisección puede resolverse fácilmente por métodos no clásicos. La sección siguiente contiene un estudio más general sobre polígonos articulados.

VI-9 POLIGONOS ARTICULADOS. Un polígono articulado puede definirse como un sistema de varillas unidas por ejes de articulación con el objeto de permitir movimientos articulados sin que se produzcan deslizamientos. Entre 1860 y 1895 se hicieron muchos trabajos relacionados con estos mecanismos. James Watt no estaba satisfecho con el mecanismo empleado en la máquina a vapor para transformar el movimiento en línea recta del pistón en movimiento circular de las ruedas. Esta y otras consideraciones más fundamentales llevaron a una serie de intentos para construir una línea teóricamente recta. Esta recta (la inversa de una circunferencia con respecto a un punto sobre ella) fue lograda por fin por Peaucellier en 1864 e independientemente por Lipkin en 1871 (Bibliografía Nº 25). Bricard obtuvo otra solución en 1895. El rápido desarrollo y popularidad del tema se manifiesta en que de veintiséis trabajos presentados a la Asamblea General Anual de la Sociedad Matemática de Londres el 11 de noviembre de 1875, seis eran sobre polígonos articulados. Probablemente este desarrollo alcanzó su cima en 1876 cuan-

do Alfred Bray Kempe presentó a la Sociedad Matemática de Londres un trabajo "Sobre un Método General de describir Curvas Planas de grado n-ésimo por medio de manipulaciones con polígonos articulados", donde se explica la construcción de un polígono articulado que sirve para trazar cualquiera curva plana $f(x,y) = 0$ de grado n-ésimo. En consecuencia, teóricamente, puede dibujarse por medio de estos mecanismos el gráfico de cualquier curva polinomia plana. Sin embargo, si damos un vistazo a algunos de los diagramas de polígonos articulados para las curvas de grados más altos (Bibliografía Nº 45), veremos que se complican demasiado para ser útiles al respecto. También se ha demostrado (Bibliografía Nº 2; pág. 52) que ninguna curva trascendente, puede dibujarse por medio de polígonos articulados. Ultimamente, poco se habla de ellos, con la excepción de unos cuantos artículos que los recomiendan como ayudas visuales (Bibliografía Nº 36 y Nº 41) o como materia de interés general (Bibliografía Nº 25 y Nº 55).

Sin embargo, la actual falta de publicidad sobre estos mecanismos no significa que estén fuera de uso. En efecto, se han descubierto muchas aplicaciones de ellos y se usan mucho. Una descripción de los computadores, en cuya construcción se usa polígonos articulados, inventados en el Laboratorio de Radiación durante la Segunda Guerra Mundial, completa un libro de tamaño considerable. El pantógrafo (Ejercicio 4, Fig. VI - 10) se emplea para copiar figuras (figuras semejantes) y para el trazado de puntos equipotenciales en un campo eléctrico. El mecanismo que emplean algunos funcionarios públicos para firmar muchos cheques simultáneamente es una forma de polígono articulado. Casi todas las maquinarias contienen polígonos articulados —en forma manifiesta o disimulada— como puede verificarse fácilmente consultando cualquier texto sobre mecanismos. Desde el punto de vista del profesor, los polígonos articulados pueden servir mucho para mostrar a los estudiantes que la geometría no es solamente estática sino también dinámica (Bibliografía N.os 36 y 41).

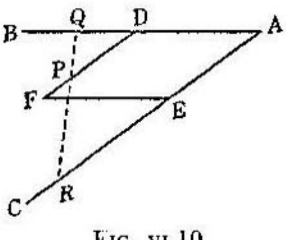


FIG. VI-10

Los polígonos articulados dieron origen a sólo uno de los varios

métodos de construcción no clásica. Concluiremos este capítulo con una breve discusión general sobre las construcciones clásicas y no clásicas.

EJERCICIOS

1. Dados los puntos A, B, C, D, E, F, G, en la Fig. VI-8 que se encuentran en una circunferencia de centro O, demostrar que $\angle AOC = \angle COE = \angle EOG$ si $AH = HB = CJ = JD = EL = LF$ y $BI = IC = DK = KE = FM = MG$, en donde AH, HI, IJ, JK, LM y MG, son, cada una, una sola varilla.

2. Dibujar un polígono articulado que divida a cualquier ángulo dado en cinco partes iguales.

3 Dar dos ejemplos del empleo de polígonos articulados para ilustrar propiedades matemáticas dinámicas (en contraposición con propiedades estáticas) en relación con figuras geométricas.

4. Se puede construir un pantógrafo con dos varillas largas AB, AC y dos cortas $FD = AE$, unidas como en la Fig. VI-10 de tal modo que $AD = FE$. Supongamos que se mantiene fijo el punto Q sobre AB y demuéstrese que a medida que P traza cualquier figura, R traza una figura semejante, siendo P, Q, R colineales, es decir, demostrar que la razón QP/QR es constante.

VI-10 RESUMEN. Los tres famosos problemas de construcción (Cap. VI-6) se formularon (Bibliografía Nº 2; pág. 20) en una época tan antigua como el siglo V a. C. Durante aquel mismo siglo, Hipias de Elis ideó una solución no clásica del problema de la trisección empleando la cuadratriz. Unos pocos años más tarde esta misma curva se empleó para resolver el problema de la cuadratura de un círculo. También se empleó la concoide en la trisección de un ángulo y en la duplicación de un cubo. Hacia fines del siglo III a. C., estos tres problemas famosos podían resolverse mediante métodos no clásicos. Los matemáticos griegos alcanzaban la cúspide de su desarrollo; Euclides desarrollaba los fundamentos de nuestra geometría plana y comenzaba a levantarse la geometría como ciencia. Sin embargo, los matemáticos tuvieron que esperar más de dos mil años para que el álgebra y la geometría se desenvolvieran lo suficiente para demostrar que los tres famosos problemas de construcción no podían resolverse utilizando únicamente regla y compás.

A los matemáticos griegos antiguos les parecía que todas las construcciones de geometría elemental debían hacerse empleando

únicamente regla y compás. Es así como estas construcciones clásicas han desempeñado un papel importante en el desarrollo de la geometría. En cierto sentido ellas son las precursoras de la geometría proyectiva. En el siglo X, un matemático árabe consideró construcciones con regla y compás con una abertura fija. Mucho más tarde (siglo XIX) Poncelet y también Steiner demostraron que las construcciones con regla y compás eran exactamente equivalentes a las construcciones con regla y un círculo fijo (Bibliografía Nº 2; pág. 30). En 1672 Georg Mohr y hacia 1800 Lorenzo Mascheroni demostraron que se necesitaba únicamente compás para obtener cualquier punto que pudiera construirse con regla y compás. En seguida comenzó a desarrollarse la geometría analítica y en el siglo XIX Gauss pudo obtener un criterio analítico para determinar la posibilidad de construir polígonos regulares. Otros descubrieron que no se podían construir las raíces de las ecuaciones que resultan de los tres problemas de construcción famosos, y por consiguiente estos problemas no podían resolverse empleando únicamente regla y compás.

Los polígonos articulados se desarrollaron rápidamente durante la última parte del siglo XIX. Pronto se demostró (Cap. VI - 9) que toda curva algebraica, y en particular una línea recta, podía trazarse empleando polígonos articulados. Desde aquella época y continuando en el siglo actual, Félix Klein contribuyó grandemente —gracias a sus famosas conferencias— a nuestro conocimiento de casi todas las materias a que nos hemos referido anteriormente.

En este capítulo hemos considerado las construcciones clásicas con regla y compás en forma detallada (Cap. VI - Secciones 1 a 6). Nos hemos referido también a algunos métodos usados en construcciones no clásicas (Cap. VI - Secciones 7 a 9). Para trisectar ángulos arbitrarios dados pueden emplearse marcas sobre una regla o curvas dadas adecuadas. Se pueden emplear polígonos articulados en una gran variedad de construcciones. Es posible inscribir en un círculo dado un polígono regular de cualquier número finito de lados utilizando un transportador. Algunos inventos como los que se acaban de citar nos permiten resolver problemas que no pueden resolverse por métodos clásicos. Otros aparatos de uso corriente como compases de división, reglas paralelas, cuadrado fijo, círculo fijo, permiten simplemente abreviar la construcción de

algún problema clásico sin hacer posible la resolución de ningún problema más. En general, cualquier problema de construcción tiene solución si no se imponen restricciones en los métodos que se pueden emplear; algunos problemas de construcción no pueden resolverse (Teorema VI - 1) si se emplea únicamente regla y compás. En consecuencia, hemos aprovechado los resultados obtenidos por Gauss, Klein y otros, hemos estudiado muchas construcciones clásicas corrientes, hemos desarrollado un criterio algebraico para determinar si se puede o no efectuar una construcción dada usando únicamente regla y compás, hemos aplicado este criterio a varios problemas clásicos, hemos estudiado unas cuantas construcciones no clásicas, y nos hemos referido brevemente a algunas aplicaciones modernas de estos métodos en la enseñanza y en la industria.

Hemos insistido en los problemas de construcción clásica famosos (Cap. VI - 6) y especialmente en el problema de la trisección. Nos hemos servido de este problema para ilustrar la aplicación de los métodos algebraicos en la solución de los problemas de construcción clásica. Hemos visto que mediante las teorías algebraicas se puede demostrar que son inútiles inevitablemente todos los intentos para obtener una solución clásica. Esta aplicación de las teorías algebraicas a las construcciones geométricas ofrece un ejemplo de la interdependencia entre el álgebra y la geometría. El capítulo que queda brinda otro ejemplo de esta interdependencia por medio del estudio de las representaciones gráficas de ciertas funciones algebraicas comunes.

EJERCICIOS

1. Construir polígonos regulares de 6, 7, 8 y 9 lados.

2. Especificar cuáles de los siguientes conjuntos de números contienen únicamente números susceptibles de construirse conforme a las restricciones clásicas: enteros, números racionales, números algebraicos, números reales.

3. Repetir el Ejercicio 2 para números que sean susceptibles de construirse empleando polígonos articulados.

4. Describir tres máquinas modernas en que se utilicen polígonos articulados.

5. Describir los polígonos articulados de tres instrumentos o máquinas comunes que usted haya empleado.

6. Discutir la contribución de Gauss al estudio de las construcciones.

CAPITULO VII

Representaciones gráficas

En la geometría euclidiana es posible representar los números enteros, los números racionales, los números constructibles (Cap. VI - 4), los números reales (Cap. I - 12) como puntos sobre una recta. Los números complejos pueden considerarse como pares ordenados de números reales (Cap. I - 15) y representarse como puntos en un plano de la geometría euclidiana. Cualquiera función uniforme de una variable real x sirve para obtener pares ordenados de números que pueden representarse gráficamente. El presente estudio de los conceptos algebraicos interpretados mediante conceptos geométricos se basa sobre estas representaciones. En este capítulo trataremos principalmente gráficos de funciones algebraicos con coeficientes reales en espacios (reales) euclidianos. Estudiaremos los gráficos de varios tipos de funciones, diferentes métodos de trazar gráficos y varias aplicaciones de los gráficos y de los métodos gráficos.

VII-1 LOS ESPACIOS EUCLIDIANO Y COMPLEJO. En el Capítulo VI nos servimos de la correspondencia biunívoca (Axioma de Cantor-Dedekind, Cap. I - 12) entre el conjunto de puntos sobre una recta en la geometría euclidiana y el conjunto de los números reales para la interpretación geométrica de las cuatro operaciones racionales. Estos conceptos pueden servir para establecer un isomorfismo (Cap. I - 8) entre el conjunto de puntos sobre una recta en la geometría euclidiana y el conjunto de los números reales. También existen isomorfismos entre pares de números reales y el conjunto de puntos sobre

un plano euclidiano, entre triples de números reales y el conjunto de puntos en el espacio euclidiano tridimensional y, en general, entre n-tuplos de números reales y el conjunto de puntos en el espacio euclidiano n-dimensional.

De acuerdo con los isomorfismos citados, cualquier punto sobre una recta en la geometría euclidiana puede identificarse unívocamente por un número real (coordenada); cualquier punto sobre un plano euclidiano puede identificarse por dos coordenadas reales; cualquier punto sobre un espacio euclidiano tridimensional por tres coordenadas reales, . . ., y cualquier punto en un espacio euclidiano de n dimensiones por n coordenadas reales. En consecuencia, en la geometría de Euclides hablaremos de una recta como de un espacio unidimensional, hablaremos de un plano como de un espacio bidimensional, y, en general, estudiaremos espacios euclidianos n-dimensionales para cualquier entero positivo n.

También suele ser conveniente referirse a un conjunto de puntos que pueden hacerse isomorfos con el conjunto de los números complejos, como a un espacio complejo unidimensional. Ya que un número complejo puede considerarse como un par ordenado de números reales, un espacio complejo unidimensional es isomorfo con un plano euclidiano. Análogamente, un espacio con dos coordenadas complejas es isomorfo con un espacio euclidiano tetradimensional. En general, un espacio complejo n-dimensional es isomorfo con un espacio euclidiano $2n$-dimensional.

En nuestras breves descripciones anteriores de los espacios euclidianos y complejos no hemos considerado explícitamente relaciones métricas o de distancia. En un tratamiento completo habría que incluir las relaciones de distancia al establecer los isomorfismos citados anteriormente.

Cualquiera función de n variables que se anula para uno o más conjuntos de valores reales de las variables (n-tuplos reales) tiene un gráfico en un espacio (real) euclidiano n-dimensional, es decir, el conjunto de todos los puntos con coordenadas (n-tuplos) que hacen la función igual a cero. La función $x^2 + y^2 - 1$ representa el gráfico de un círculo de radio unidad en torno al origen en el plano euclidiano xy. La función $x^2 + y^2 + 1$ no tiene ceros reales y se dice que tiene un *gráfico vacío* en el plano xy. En consecuencia, una función polinomia en n variables puede o no puede tener

un gráfico no vacío en el espacio euclidiano de n dimensiones (Cap. VII - 2).

La situación es completamente diferente en un espacio con coordenadas complejas. Todo polinomio $f(x)$ con coeficientes complejos y grado positivo tiene un gráfico en un espacio con una coordenada compleja (Teorema IV - 3). Por ejemplo, $x^2 - 1$ tiene por gráfico a los puntos $+1$ y -1, sea que se considere que los puntos están en una recta real o en un espacio con una coordenada compleja similar a la estudiada en el Cap. I - 16; $x^2 + 1$ tiene un gráfico vacío sobre la recta real pero los puntos i y $-i$ son su gráfico en un espacio con una coordenada compleja. Esta propiedad de los polinomios $f(x)$ puede ampliarse (Ejercicios 4, 5 y 6) para demostrar que toda función algebraica de n variables tiene un gráfico no vacío en un espacio con n coordenadas complejas.

EJERCICIOS

1. Dar ejemplos de cuatro funciones de tres variables a) que tengan un gráfico no vacío en E_3; b) que tengan un gráfico vacío en E_3.
2. Dar ejemplos de tres funciones en n variables, a) que tengan un gráfico no vacío en E_n; b) que tengan un gráfico vacío en E_n.
3. Demostrar que cualquier polinomio en una variable con coeficientes complejos tiene un gráfico no vacío en un espacio con una coordenada compleja.
4. Demostrar que cualquier polinomio en n variables con coeficientes complejos tiene un gráfico no vacío en un espacio con n coordenadas complejas.
5. Demostrar que cualquiera función algebraica en una variable con coeficientes complejos tiene un gráfico no vacío en un espacio con una coordenada compleja.
6. Demostrar que cualquiera función algebraica de n variables con coeficientes complejos tiene un gráfico no vacío en un espacio con n coordenadas complejas.

VII - 2 POLINOMIOS. Cualquier polinomio lineal en n variables con coeficientes reales tiene siempre un gráfico real en un espacio E_n euclidiano n-dimensional. Este gráfico es un punto en E_1, una recta en E_2, un plano en E_3, y en general, un hiperplano en E_n. En consecuencia, el gráfico de una función lineal real de n variables es un E_{n-1} en E_n para todos los valores positivos de n. Cada uno de estos gráficos, E_{n-1} espacios, dividen al E_n correspondiente en dos regiones, en una de las cuales la función es positiva y en la

otra negativa. Los gráficos se llaman subespacios lineales y desempeñan un papel importante en muchas teorías matemáticas avanzadas.

Dada cualquiera ecuación lineal en n variables ($n > 1$) con coeficientes reales, se pueden encontrar mediante operaciones racionales muchos n-tuplos reales arbitrarios de números para los cuales la ecuación se satisface. En consecuencia, se pueden encontrar las coordenadas de muchos puntos arbitrarios sobre el gráfico mediante operaciones racionales. El gráfico queda totalmente determinado por n-tuplos (puntos) linealmente independientes (Cap. v - 13). Por ejemplo, un plano está completamente determinado por tres puntos que no se encuentran sobre la misma recta (Cap. v - 14) y, en general, un E_{n-1} está completamente determinado por n puntos que no se encuentran en el mismo E_{n-2}. Cuando los coeficientes de las n variables y el término constante son reales y diferentes de cero, los n puntos reales y distintos, es decir, las intersecciones del gráfico con los ejes coordenados determinan completamente el gráfico.

Cualquier polinomio de grado n en una variable con coeficientes complejos tiene n ceros complejos (Teorema IV - 2). Un polinomio de grado n con coeficientes reales tiene n ceros complejos pero puede o no puede tener ceros reales, como se ilustró en los ejemplos $x^2 - 1$, $x^2 + 1$ citados anteriormente. Por consiguiente, una ecuación polinomia real en una variable puede o no puede tener un gráfico no vacío sobre la recta real. Por medio de exactamente el mismo razonamiento, resulta que un polinomio real en dos variables puede o no puede tener ceros reales correspondientes a un valor dado de una de las variables. Por ejemplo, $x^2 + y^2 - 25$ tiene ceros $+3$ y -3 para $x = 4$, pero no tiene ceros reales para $x = 6$. Si un polinomio tal como $x^2 + y^2 + 1$ no tiene ceros reales para cada valor real de x, tiene un gráfico vacío en el plano euclidiano. En general, si un polinomio en n variables no tiene ningún cero real para cada conjunto real de valores de $n - 1$ de las variables, tiene un gráfico vacío en el espacio euclidiano de n dimensiones.

El gráfico de un polinomio divide al espacio en dos regiones en las cuales el polinomio tiene signo constante, dado que cualquier polinomio es una función continua de sus variables. Un polinomio en una variable cambia de signo si y sólo si la variable

pasa por un cero de multiplicidad impar (Cap. IV - 13). Para dos o más variables debe considerarse la trayectoria del punto general $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ al pasar por un punto sobre el gráfico de $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Por ejemplo, el polinomio $x^2 + y^2 - 1$ cambia su signo en $(1, 0)$ a medida que el punto (x, y) cruza la recta $y = 0$, pero no cambia su signo $(1,0)$ a medida que el punto (x, y) cruza la recta $x = 1$. En general, la multiplicidad m de un punto de intersección P de una curva C con el gráfico de un polinomio en n variables puede definirse estableciendo que a medida que el punto $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ cruza la curva C, el polinomio cambia de signo en P, si y sólo sí m es impar. Definiremos solamente la multiplicidad de la intersección de una recta y una curva polinomia en un plano.

Supongamos que una curva polinomia dada $f(x', y')$ y una recta dada se cortan en un punto $P:(s, t)$ con una multiplicidad k, en que k debe determinarse. Por medio del cambio de variables (traslación, Cap. V - 15) $x = x' - s, y = y' - t$, la curva $f(x + s, y + t) = g(x, y)$ y la recta dada expresada en las nuevas coordenadas se cortan en el nuevo origen con la misma multiplicidad k con que la curva $f(x', y')$ cortaba a la recta dada en P. La ecuación de la recta tiene ahora la forma $y = mx$ o bien la forma $x = 0$. Después de sustituir en estos dos casos consideremos, respectivamente, los polinomios $g_1(x) = g(x, mx)$ y $g_2(y) = g(0, y)$. El valor de k queda entonces determinado por el hecho de que los términos de menor grado en $g_1(x)$ tienen grado k; o si la recta es $x = 0$, $g_2(y)$ tiene grado k. Conforme a esta definición, se dice que una recta y una curva que no pasan las dos por el punto P, tienen una *intersección de multiplicidad cero* en P.

El gráfico de un polinomio en n variables divide a un espacio euclidiano n-dimensional en un número finito de regiones, en cada una de las cuales el polinomio tiene signo constante. El problema general de determinar estas regiones [las soluciones de $0 < f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $0 < -f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$] y sus límites [las soluciones de $0 = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$] aún no ha sido completamente resuelto. No obstante, se ha hecho una considerable cantidad de trabajo con polinomios en dos o tres variables. En particular, estudiaremos ahora polinomios reales de grado dos en dos variables (Cap. VII - 3) y polinomios reales de grado dos en tres variables (Cap. VII - 4).

EJERCICIOS

1. Escribir una ecuación lineal en n variables reales y encontrar un conjunto de n puntos que determinen su gráfico cuando n es igual a a) 2; b) 3; c) 4; d) 5; e) 6; f) 10.

2. Encontrar la multiplicidad de la intersección en el origen de la recta $y = 0$ con cada una de las siguientes curvas:

(a) $y = x^2$, (d) $x^3 + 3x^2y + x^2 = 0$,
(b) $x = y^3$, (e) $x^2 + y^2 = 1$,
(c) $y^4 = x^2$, (f) $x = 0$

3. Encontrar la multiplicidad de la intersección en el origen de cada una de las siguientes rectas con cada una de las curvas del Ejercicio 2: a) $x = 0$; b) $y = x$.

4. Encontrar la multiplicidad de la intersección en (2, 1) de la recta $y = 1$ con cada una de las siguientes curvas:

(a) $x + y = 3$, (d) $(x - 2)^2 + y^2 = 1$,
(b) $x^2 + y^2 = 5$, (e) $x^3 = 8y$,
(c) $x = 2y^2$, (f) $x^2 - 3y^2 = 1$

5. Repetir el Ejercicio 4, empleando cada una de las siguientes rectas: a) $x = 2$; b) $x = 2y$.

VII - 3 SECCIONES CONICAS. La ecuación cuadrática general real en dos variables tiene la forma

$$(\text{VII - 1}) \qquad Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

donde se supone que los coeficientes son reales y que $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$. Los gráficos de las ecuaciones de la forma (VII - 1) se denominan *secciones cónicas*, dado que para cada conjunto de coeficientes reales para los cuales (VII - 1) tiene un gráfico no vacío, el gráfico puede obtenerse por medio de la intersección de un plano y un cono circular recto (posiblemente degenerado). En esta sección estudiaremos brevemente el desarrollo de la hipérbola, de la parábola, de la elipse y del círculo como intersecciones de planos con un cono recto circular, es decir, como secciones planas de un cono recto circular. También mencionaremos varias propiedades de estas secciones cónicas a manera de repaso de geometría analítica.

Un círculo puede definirse como el lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de un punto fijo dado Q del

plano. Si hay un sistema de coordenadas (x,y) y una relación de distancia en el plano, el círculo es el gráfico de un polinomio $(x-h)^2+(y-k)^2-r^2$, en que su centro Q tiene coordenadas (h, k) y la distancia es $r \leqq 0$. Un círculo con $r = 0$ se denomina *círculo punto* y se clasifica como una forma degenerada del círculo.

Consideremos un círculo real no degenerado con centro Q y sea $P \neq Q$ un punto fijo real arbitrario sobre la recta que pasa por Q y es perpendicular al plano del círculo. El lugar geométrico de los puntos del conjunto de rectas que unen a P con los puntos del círculo se denomina un *cono recto circular* (Fig. VII - 1). El cono tiene dos *mantos* que se juntan en P. El lugar geométrico de los puntos del conjunto de rectas perpendiculares al plano del círculo a través de los puntos del círculo se denomina *cilindro circular recto* (Fig. VII - 2) y puede considerarse como el caso límite del cono a medida que la distancia PQ crece indefinidamente.

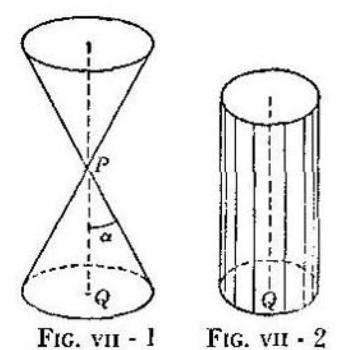


FIG. VII - 1 FIG. VII - 2

Sea π un plano real arbitrario y consideremos como anteriormente el cono circular recto generado por rectas que pasan por el punto fijo P y un círculo no degenerado dado con centro Q. Sea α el ángulo constante entre las rectas generatrices y PQ. Se dice que un gráfico de la ecuación cuadrática (VII - 1) es degenerado si y sólo si resulta de hacer pasar el plano π a través de P. Esta condición puede también expresarse algebraicamente como sigue (Bibliografía Nº 18; págs. 215-219): El gráfico es degenerado si y sólo si $\Delta = 0$, en que

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2A & B & D \\ B & 2C & E \\ D & E & 2F \end{vmatrix}.$$

Gráficos no degenerados de (VII - 1) son una hipérbola, una parábola o una elipse según que $B^2 - 4AC >, =, < 0$. Geométricamente, estos tres casos se generan, respectivamente, según que el menor ángulo θ entre el plano π y la recta PQ sea $<, =, > \alpha$ (Fig. VII - 3). (La normal al plano forma un ángulo con PQ igual al complemento de θ). Por ejemplo, consideremos el cono $3x^2 + 3y^2 - z^2 = 0$, con $\alpha = 30^\circ$. Para cualquier número real k el plano $z = k$, con θ igual a un ángulo recto, corta al cono en un círculo $3x^2 + 3y^2 - k^2 = 0$; el plano $z = x + k$ con $\theta = 45^\circ > \alpha$ corta al cono en una elipse $2x^2 + 3y^2 - 2xk - k^2 = 0$; el plano $z = x\sqrt{3} + k$ con $\theta = 30^\circ = \alpha$ corta al cono en una parábola $3y^2 - 2xk\sqrt{3} - k^2 = 0$; y el plano $x = 2x + k$ con $\theta < \alpha$ corta al cono en una hipérbola $3y^2 - x^2 - 4xk - k^2 = 0$.

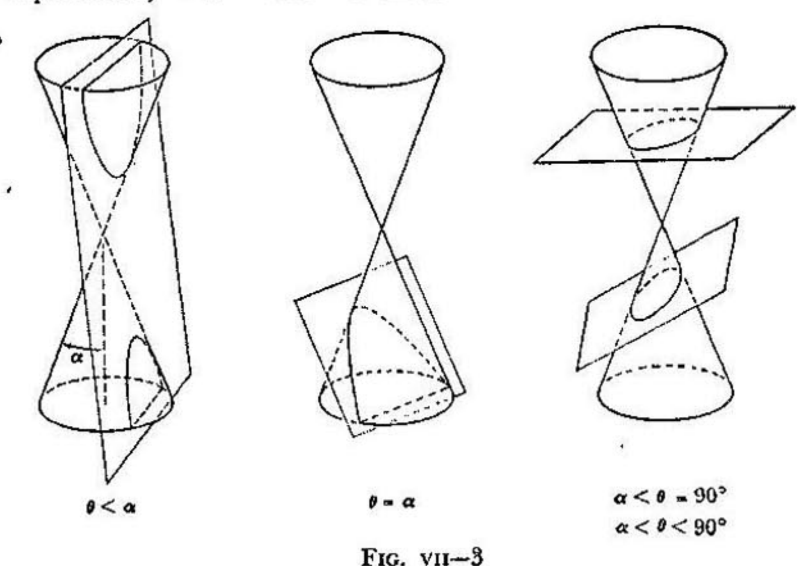


FIG. VII—3

Las cónicas degeneradas pueden identificarse algebraicamente o geométricamente. Desde un punto de vista geométrico (Ejercicio 1), una hipérbola puede degenerar en dos rectas que se cortan; una parábola en dos rectas coincidentes o en dos rectas paralelas (empleando un cilindro circular recto), y una elipse en un punto. La elipse se convierte en un círculo cuando θ es un ángulo recto.

En la mayoría de los textos de geometría analítica se demuestra (Ejercicio 6) que si los ejes coordenados efectúan una rotación

(Cap. V - 15) igual a un ángulo ψ, en que tg $2\psi = B/(A - C)$ si $A \neq C$ y $\psi = 45^o$ si $A = C$, la ecuación (VII - 1) toma la forma

$$\text{(VII - 2)} \qquad A'x^2 + C'y^2 + D'x + E'y + F' = 0$$

También se puede demostrar (Ejercicio 7) que los números $A + C$, $B^2 - 4AC$, y $\triangle$ permanecen invariables al efectuarse una rotación o una traslación de los ejes coordenados (Bibliografía Nº 11; pág. 100). En consecuencia $B^2 - 4AC = -4A'C'$ y el gráfico, posiblemente degenerado, de (VII - 2) es una hipérbola, parábola, o elipse según que $A'C' <, =, > 0$. Ya que A' y C' no pueden ser ambas cero en la ecuación cuadrática (VII - 2), la ecuación general de una parábola no degenerada puede escribirse en una de las formas

$$\text{(VII - 3)} \qquad (y - k)^2 = 2p(x - h) \text{ ó } (x - h)^2 = 2p(y - k).$$

Análogamente, si $A'C' \neq 0$, se hace $h = -D'/2A'$ y $k = -E'/2C'$. Luego una elipse no degenerada tiene una ecuación de la forma:

$$\text{(VII - 4)} \qquad \frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1, \quad 0 < a, \quad 0 < b$$

y una hipérbola no degenerada tiene una ecuación de la forma

$$\text{(VII- 5)} \; \frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1 \quad \text{o} \quad \frac{(y - k)^2}{a^2} - \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1.$$

La primera parábola de (VII - 3) tiene eje $y = k$, vértice (h, k), y pasa por los puntos $(h + p/2, k \pm p)$. Se puede definir en el plano como el lugar geométrico de los puntos equidistantes de la recta $x = h - p/2$ (denominada la *directriz*) y del punto $(h + p/2, k)$ (llamado foco).

La elipse (VII - 4) tiene centro (h, k) y, si suponemos que $a^2 > b^2$, los extremos de su eje mayor se encuentran en $(h \pm a, k)$, los extremos de su eje menor se encuentran en $(h, k \pm b)$, y sus focos se encuentran en $(h \pm \sqrt{a^2 - b^2}, k)$. Si $a^2 = b^2$, es una circunferencia. La elipse puede definirse en el plano como el lugar geométrico de los puntos P tales que $PF_1 + PF_2 = 2a$, en donde F_1 y F_2 son los focos.

La primera hipérbola de (VII - 5) tiene el centro en (h,k), los extremos de su eje mayor en $(h \pm a, k)$, sus focos en $(h \pm \sqrt{a^2 + b^2}$

k), y las asíntotas $b(x - h) = \pm a(y - k)$. Se puede definir en el plano como el lugar geométrico de los puntos P tales que $PF_1 - PF_2 = \pm 2a$.

En consecuencia el gráfico real (en caso de que exista) de una ecuación cuadrática general (VII - 1) puede obtenerse como la sección de un cono recto circular (posiblemente degenerado) interceptada por un plano y se denomina sección cónica. La forma del gráfico puede determinarse mediante la cantidad $B^2 - 4AC$ y la característica (Cap. V - 10) del determinante $\triangle$. Se puede demostrar que las definiciones de hipérbola, parábola, y elipse como lugares geométricos en un plano son equivalentes a las definiciones como secciones de un cono recto circular. En (Bibliografía Nº 38; págs. 102-138) puede consultarse un estudio muy ameno de las secciones cónicas; en (Bibliografía Nº 18; págs. 171-236) puede consultarse un estudio más completo y en (Bibliografía Nº 11) una historia de las secciones cónicas y superficies cuádricas.

EJERCICIOS

1. Dibujar figuras que ilustren en qué forma pueden obtenerse cada una de las siguientes cónicas degeneradas no vacías como secciones planas de un cono recto circular o de un cilindro recto circular: a) dos rectas que se cortan; b) dos rectas coincidentes; c) dos rectas paralelas distintas; d) un punto.

2. Hacer el gráfico de las siguientes secciones cónicas:

(a) $x^2 + y^2 = 25$,
(b) $9x^2 + 4y^2 = 36$,
(c) $9x^2 - 4y^2 = 36$,
(d) $x^2 = y + 2$,
(e) $x^2 - 2x = y$,
(f) $x = y^2 - 2y + 5$,
(g) $y = x^2 - 6x + 7$.

3. Reconocer los gráficos de las ecuaciones siguientes:

(a) $x^2 - 2y^2 + 3x + y = 5$,
(b) $x^2 - 2xy + y^2 - 2x + y + 7 = 0$,
(c) $xy = 12$,
(d) $x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$,
(e) $3x^2 + 2xy - y^2 + 5x - 2y + 1 = 0$,
(f) $x^2 + 2xy + y^2 + x + y - 6 = 0$,
(g) $2x^2 - xy + 3y^2 - 4x + 6y = 0$.

4. Escribir cada una de las ecuaciones del Ejercicio 3 en la forma (VII-2).

5. Hacer el gráfico de las secciones cónicas del Ejercicio 3.

6. Deducir la ecuación (VII-2) de la (VII-1) considerando el efecto de una rotación (Cap. V-15) sobre (VII-1), mostrando como debe elegirse un ángulo de

rotación tal que desaparezca el término xy, y expresando los nuevos coeficientes respecto de los coeficientes antiguos y del ángulo elegido.

7. Demostrar que cada una de las expresiones siguientes permanecen invariantes sometidas a la rotación empleada en el Ejercicio 6: a) $A + C$, b) $B^2 - 4AC$, c) $\triangle$.

8. Encontrar la característica (Cap. V-10) del determinante $\triangle$ correspondiente a cada ecuación del Ejercicio 3. Examinar el significado general de la característica de $\triangle$.

VII-4 SUPERFICIES CUADRICAS.

El gráfico de una ecuación cuadrática $f(x,y,z) = 0$ en tres variables con coeficientes reales se denomina *superficie cuádrica*. Si falta una de las variables en la ecuación $f(x,y,z) = 0$, como ser, z, entonces $f(x,y,z)$ puede escribirse como $f(x,y)$ y el gráfico en tres dimensiones (superficie cuádrica) de la ecuación cuadrática $f(x,y) = 0$ corta a todo plano $z = c$ en una sección cónica (Cap. VII - 3) congruente con el gráfico de $f(x,y)$ en el plano xy. En este capítulo hablaremos indiferentemente del gráfico de $f(x,y) = 0$ y del gráfico de $f(x,y)$. Esta terminología es análoga a nuestras consideraciones anteriores respecto a las raíces de una ecuación polinomia $f(x) = 0$ y los ceros de un polinomio $f(x)$. El gráfico de $f(x,y)$ en tres dimensiones consiste en todos los puntos sobre rectas paralelas al eje z y que pasan por puntos del gráfico de $f(x,y)$ en el plano xy. El gráfico en tres dimensiones es un caso especial de un cilindro (no necesariamente circular). Estrictamente hablando, un *cilindro* puede definirse como una superficie que comprende todos los puntos sobre rectas que son paralelas a una recta fija y que pasan por puntos de una curva fija en un plano que no es paralelo a la recta fija. De esta manera el gráfico de cualquiera ecuación cuadrática real $f(x,y,z) = 0$ al que le falta una de las variables puede considerarse como un cilindro que tiene un eje coordenado x como recta fija y una sección cónica como curva fija en el plano coordenado que no contiene a la recta fija. Cualquier plano paralelo al plano de la curva fija corta al cilindro en una sección cónica congruente (por traslación) a la curva fija.

Supongamos que $f(x,y,z) = 0$ es cualquiera ecuación cuadrática real en tres variables x, y, z y que $mx + ny + rz + d = 0$ es el gráfico de cualquier plano real (Cap. VII - 2). Entonces por lo menos uno de los coeficientes m, n, r es diferente de cero, y existe una rotación en el espacio tal que en el nuevo sistema coordenado el

plano citado tiene la ecuación $z = c$ y la superficie cuádrica tiene la ecuación $g(x,y,z) = 0$, en que $g(x,y,z)$ es un polinomio cuadrático real. La intersección del plano y de la superficie cuádrica se encuentra ahora sobre el cilindro $g(x,y,c) = 0$ y, dado que $g(x,y,c)$ es un polinomio cuadrático real en x e y, esta intersección es una sección cónica. Encontramos así, por rotación del sistema coordenado en forma tal que el nuevo eje z sea perpendicular al plano dado, que cualquiera sección plana de una superficie cuádrica es una sección cónica. El gráfico de cualquier superficie cuádrica se puede obtener teniendo presente las secciones planas (secciones cónicas) paralelas a los planos coordenados. Por ejemplo $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2z$, siendo $ab \neq 0$ (Fig. VII - 4), tiene una sección elíptica en el plano $z = c$ para todos los valores positivos de c, tiene un punto para $c = 0$ y ningún gráfico real si c es negativo. Tiene una sección parabólica para todos los valores reales de d cuando $x = d$ ó $y = d$, y se denomina un paraboloide elíptico.

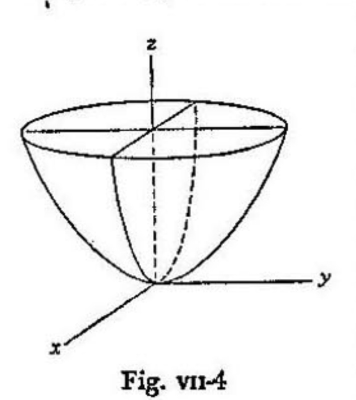


Fig. VII-4

El problema de obtener la superficie cuádrica de sus secciones planas paralelas a los planos coordenados es exactamente análogo a aquél de obtener una sección cónica de sus secciones lineales paralelas a los ejes coordenados. Por ejemplo, la parábola $y = x^2$ corta a toda recta $x = a$ en un solo punto y corta a la recta $y = b$ en dos puntos distintos cuando b es positivo, en dos puntos coincidentes cuando $b = 0$, y en dos puntos imaginarios (gráfico vacío en el plano euclidiano) cuando b es negativo. El gráfico de la parábola puede imaginarse gracias a estas intersecciones, teniendo presente el hecho de que el gráfico es continuo (Cap. III - 12 y Cap. III - 13). Este método de determinar gráficos puede emplearse para el trazado de curvas de nivel que representan puntos de la misma elevación en los mapas, para el trazado de líneas isotermas que representan puntos de la misma temperatura, y en muchas otras aplicaciones de curvas de niveles como se señala en algunos textos de cálculo. En consecuencia, dado cualquier polinomio $f(x,y)$, el problema de formarse una imagen de la superficie $z = f(x,y)$ de las secciones planas en las

cuales $z = c$, es el mismo que aquél de imaginar la topografía de un paisaje mientras se observa las curvas de nivel sobre un mapa.

El método de determinar gráficos mediante secciones puede emplearse también para formarse la imagen de gráficos de cuatro dimensiones. En este caso las secciones se eligen mediante paralelas tridimensionales a la coordenada tridimensional. Por ejemplo $x^2 + y^2 = 1$ puede representar el gráfico de un círculo de radio unidad en el plano xy o un cilindro en el espacio tridimensional de modo que toda sección que resulte de la intersección con un plano $z = c$, es un círculo de radio unidad. Análogamente, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ puede representar el gráfico de una esfera de radio unidad en un espacio tridimensional o un cilindro en un espacio tetradimensional tal que toda sección que resulte de la intersección con un espacio tridimensional $w = c$ es una esfera de radio unidad. Las limitaciones de este método aplicado al espacio de cuatro dimensiones, de cinco dimensiones, etc., residen en el hecho de que estamos habituados al espacio tridimensional y en la capacidad de formarse imágenes mentales que tenga la persona que utilice el método (Ejercicios 9 a 14).

Algunas superficies cuádricas tales como el hiperboloide de una hoja

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

(Fig. VII - 5), contienen líneas rectas y se denominan *superficies regladas.* Por ejemplo, consideremos los dos pares de planos

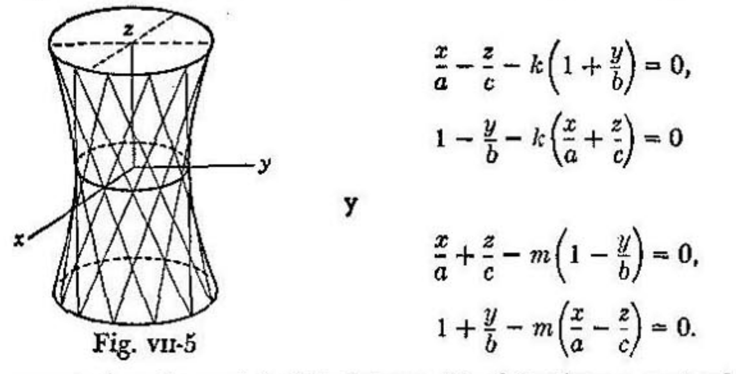


Fig. VII-5

$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} - k\left(1 + \frac{y}{b}\right) = 0,$$

$$1 - \frac{y}{b} - k\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = 0$$

y

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} - m\left(1 - \frac{y}{b}\right) = 0,$$

$$1 + \frac{y}{b} - m\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = 0.$$

para todo valor real de k la intersección del primer par de planos es una recta sobre la superficie cuádrica,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2},$$

que resulta al eliminar k entre las ecuaciones de los dos planos. De esta manera se obtiene una recta sobre la superficie cuádrica para cada valor real de k. Análogamente, se obtiene un segundo conjunto de rectas sobre la superficie cuádrica si se consideran valores reales de m en las ecuaciones del segundo par de plano. Cuando se emplean coeficientes y coordenadas complejas, toda cónica central (hipérbola o elipse) tiene un gráfico reglado. Los conos y los cilindros son ejemplos corrientes de superficies regladas en el espacio real tridimensional. Las superficies cuádricas reales pueden clasificarse en elipsoides, paraboloides elípticos, etc., en relación con los coeficientes de los términos de segundo grado y con el número de líneas de la superficie que pasan por cada punto de la superficie. La mayoría de los textos de geometría analítica considera unas cuantas superficies cuádricas especiales. El propósito que nos guió en esta sección fue el de señalar que existe una teoría bastante compleja y una clasificación de las superficies cuádricas análogas a aquéllas de las secciones cónicas. Para mayores detalles se puede consultar los N.os 11, 16 y 18 de la Bibliografía.

EJERCICIOS

1. Dar un ejemplo de una ecuación cuadrática real general en tres variables.
2. Indicar las ecuaciones de cinco cilindros en el espacio de tres dimensiones que tengan diferentes tipos de curvas fijas.
3. Hacer el gráfico de las curvas fijas de los cilindros dados en el Ejercicio 2.
4. Hacer el gráfico de los cilindros dados en el Ejercicio 2.
5. Discutir las secciones que resultan en cada una de las siguientes superficies cuádricas por medio de todos los planos $z = c$:

(a) $4x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 36$, (d) $x^2 + y^2 = z^2$,
(b) $x^2 = 2y$, (e) $x^2 - z^2 = 0$,
(c) $x^2 - y^2 = 1$, (f) $x^2 - 4y^2 = 8z$.

6. Repetir el Ejercicio 5 para todos los planos $x = a$ e $y = b$.
7. Hacer el gráfico de las superficies cuádricas del Ejercicio 5.
8. Dar los nombres de las superficies cuádricas del Ejercicio 5.
9. Discutir el gráfico $x = 1$ en los siguientes espacios: a) el eje de las x; b) el plano xy; c) el espacio de tres dimensiones xyz; d) el espacio de cuatro dimensiones $xyzw$; e) el espacio de cinco dimensiones $xyzwn$.

10. Repetir el Ejercicio 9 para $x^2 - 1$.

11. Discutir los gráficos de $x^2 + y^2 = 4$ en los espacios b) hasta e) del Ejercicio 9.

12. Repetir el Ejercicio 11 para $y = x^2$.

13. Discutir los gráficos de las ecuaciones polinomias del Ejercicio 5 en el espacio de cuatro dimensiones $xyzw$.

14. Discutir los gráficos siguientes en un espacio de cuatro dimensiones:

(a) $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$,
(b) $x + y + z + w = 1$,
(c) $x^2 + y^2 = z^2 + w^2$.

15. ¿Cuántas líneas de la superficie de un cono (Fig. VII-1) pasan por cada punto de ella?

16. ¿Cuántas líneas hay en cada punto de un cilindro (en un espacio de tres dimensiones) que tenga como curva fija a una sección cónica no degenerada?

17. Dada una ecuación cuadrática real general en tres variables (Ejercicio 1), escribir su determinante $\triangle$ análogo a aquel de la sección cónica general del Cap. VII-3.

18. Encontrar la característica de $\triangle$ de cada una de las superficies cuádricas de los Ejercicios 2 y 5. Hacer consideraciones sobre el significado general de la característica de $\triangle$.

VII-5 CURVAS PLANAS DE GRADO SUPERIOR.

Los gráficos de polinomios $f(x,y)$ de grado mayor que dos en el plano xy se denominan *curvas planas de grado superior.* Estos gráficos se han clasificado perfectamente para los casos en que $f(x,y)$ tiene grado tres o cuatro, es decir, para las curvas cúbicas y cuárticas. Muchas otras curvas se han estudiado ampliamente. En esta sección definiremos un punto singular y, en particular, un punto doble. En seguida clasificaremos puntos dobles y por último clasificaremos curvas planas cúbicas en relación a sus puntos dobles. Se mencionarán algunas propiedades generales de las curvas planas de grado superior.

Se dice que un punto P de una curva, es un *punto singular* de ella si toda recta que pasa por P corta a la curva en P, con una multiplicidad (Cap. VII - 2) de por lo menos dos. Si alguna recta que pasa por un punto singular P corta a la curva con multiplicidad dos en P, entonces P es un *punto doble.* Cualquiera recta pertenece completamente a una curva (es decir, es una componente de ella) de grado n o bien corta a la curva en, a lo sumo, n puntos. Esto se puede demostrar resolviendo simultáneamente una ecua-

ción $f(x,y) = 0$ de grado n y la ecuación de una recta, pues la ecuación resultante en una variable es idénticamente nula o de grado, a lo sumo, n. Análogamente, dos curvas de grado m y n tienen una componente en común o se cortan en, a lo sumo, mn puntos. Empleando estos argumentos, se puede demostrar que una curva de grado n puede tener a lo sumo $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ puntos dobles (Bibliografía Nº 23; págs. 41-42). En particular, una curva cúbica tiene a lo sumo un punto doble (Ejercicio 1).

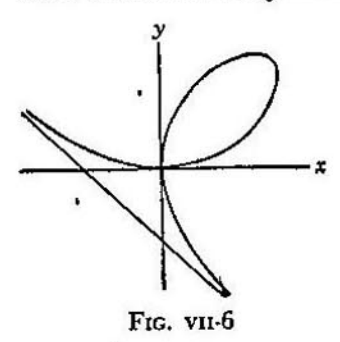


FIG. VII-6

En un punto cualquiera (no singular), una curva de grado n tiene una tangente única; en un punto doble, tiene dos tangentes; y en general, en un punto singular P tiene k tangentes si toda recta que pasa por P corta a la curva en P con multiplicidad por lo menos k, y alguna recta corta a la curva en P con multiplicidad exactamente k.

Los puntos dobles se clasifican en *nodos* si las tangentes son distintas, y *cúspides* si coinciden. Si las tangentes son rectas imaginarias conjugadas, el punto doble se denomina *punto aislado o acnodo*. El Folio de Descartes, $x^3 + y^3 = 3axy$ (Fig. VII - 6), tiene un nodo en el origen y la recta $x + y + a = 0$ es su asíntota (Cap. VII - 6); la parábola semicúbica $y^2 = x^3$ (Fig. VII - 7) tiene una cúspide en el origen; y la curva $y^2 = x^2(x - 1)$ (Fig. VII - 8) tiene un punto aislado en el origen.

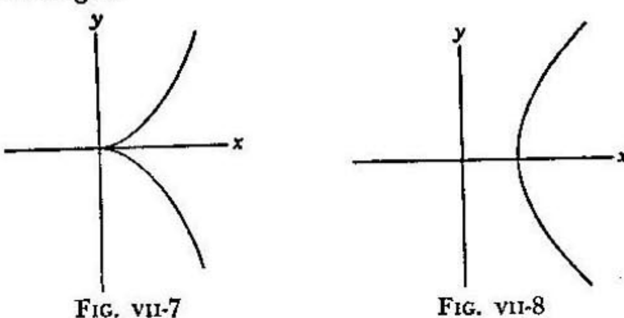


FIG. VII-7 FIG. VII-8

Las curvas cúbicas se clasifican generalmente como sigue, teniendo en cuenta sus puntos dobles:

(i) Curvas cúbicas sin puntos dobles: *cúbicas elípticas;*

(ii) Curvas cúbicas con un nodo: *cúbicas nodales;*

(iii) Curvas cúbicas con una cúspide: *cúbicas cuspidales.*

Puede consultarse muchas propiedades de las curvas cúbicas en (Bibliografía Nº 23; págs. 139-243) y (Bibliografía Nº 26; págs. 201-263).

Se puede clasificar también a las curvas cuárticas en relación con sus puntos singulares. En Bibliografía Nº 23, págs. 244-328, y Nº 26, págs. 264-349, se puede consultar esta clasificación y muchas propiedades de las curvas cuárticas.

Las curvas planas de cualquier grado n pueden considerarse según sus puntos dobles y otros puntos singulares. En particular, cualquier curva irreducible (Cap. VII - 9) que tenga su número máximo de puntos singulares, es decir, *deficiencia cero,* se denomina *curva unicursal.* Una curva unicursal se caracteriza porque las coordenadas de todo punto de la curva pueden expresarse racionalmente por medio de un solo parámetro. Las curvas unicursales son importantes en varias teorías matemáticas.

Las dos secciones que siguen contienen mayores detalles sobre el trazado de curvas planas de orden superior.

EJERCICIOS

1. Demostrar que una curva cúbica irreductible tiene a lo sumo un punto doble.

2. Hacer un gráfico de cada una de las curvas siguientes e indicar la ecuación correspondiente a) cúbica elíptica; b) cúbica nodal; c) cúbica cuspidal.

VII - 6 FUNCIONES RACIONALES.

Un polinomio $f(x,y)$ en x e y con coeficientes complejos puede considerarse como un polinomio en y con coeficientes pertenecientes al anillo de los polinomios en x con coeficientes complejos. La ecuación $f(x, y) = 0$ define, por consiguiente, a y como una *función algebraica* de x (Cap. III - 16). Si $f(x,y)$ es de grado n en y, hay exactamente n valores complejos de y para cada valor de x, de modo que el coeficiente de y^n no se anula. En consecuencia, una función algebraica no es, en general, uniforme para n mayor que uno. Para $n = 1$, tenemos $f(x,y) = p(x)y - q(x) = 0$, donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios en x. En esta sección consideraremos el caso especial $y = q(x)/p(x)$, en que $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios en x primos entre si con coeficientes reales.

Estudiaremos en especial las asíntotas y las intersecciones con los

ejes coordenados. El gráfico (Fig. VII-9) de la ecuación $2x + 3y = 6$ tiene intersecciones con el eje x en 3 y con el eje y en 2. En general, cada intersección de una curva con un eje coordenado puede encontrarse valiéndose del origen y del punto unidad para determinar un segmento de longitud orientada igual a la coordenada del punto de intersección. Esta coordenada se denomina una *intersección* de la curva (con uno de los ejes coordenados). En particular, los ceros reales de una función $y = f(x)$ son las intersecciones de su gráfico con el eje x.

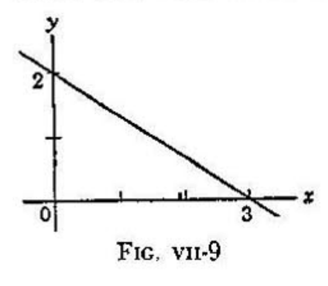


FIG. VII-9

Es fácil describir una asíntota. Supongamos que un punto variable P sobre el gráfico de $f(x,y)$ se mueve de modo que una o sus dos coordenadas se hagan indefinidamente grandes. Si al mismo tiempo el punto P se aproxima indefinidamente a una recta $ax + by + c = 0$, esta recta se denomina una *asíntota* del gráfico de $f(x,y)$. Por ejemplo $x^2y - 1$ tiene a ambos ejes coordenados como asíntotas (Fig. VII-10); $xy - 2y - 1$ tiene a las rectas $x = 2$ e $y = 0$ como asíntotas (Fig. VII-11). Las asíntotas de la forma $y = c$ se denominan *asíntotas horizontales;* aquellas de la forma $x = c$, *asíntotas verticales.* Existen también otras asíntotas como, por ejemplo, la recta $x + y + a = 0$ de la Fig. VII-6.

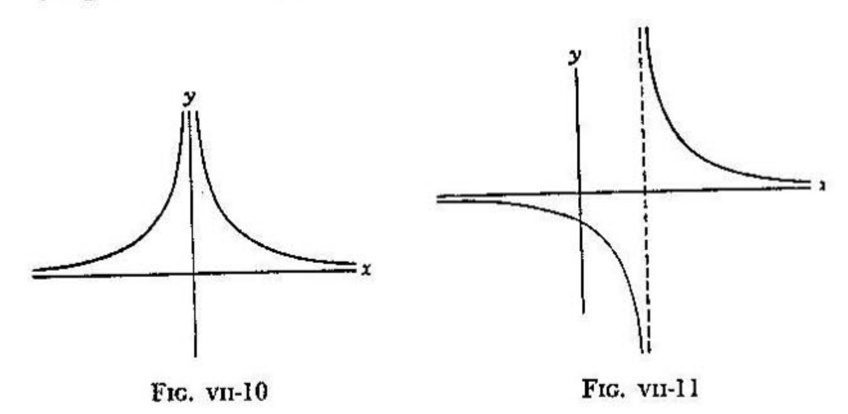


FIG. VII-10

FIG. VII-11

Las asíntotas horizontales del gráfico de un polinomio $f(x,y)$ se obtienen igualando a cero los coeficientes de la más alta potencia

de x en $f(x, y)$. Análogamente, las asíntotas verticales pueden obtenerse igualando a cero los coeficientes de la más alta potencia de y. Por ejemplo, $xy - 2y - 1$ tiene una asíntota horizontal $y = 0$ y una asíntota vertical $x = 2$ (Fig. VII - 11).

La función $y = q(x)/p(x)$, en que $q(x)$ y $p(x)$ son polinomios en x, se denomina *función racional* de x (Cap. III - 3). Supondremos que $q(x)$ y $p(x)$ son primos entre sí (Cap. III - 4). El gráfico de esta función racional tiene entonces intersección con el eje x en las raíces reales de $q(x)$ y asíntotas verticales correspondientes a las raíces reales de $p(x)$. Las asíntotas horizontales pueden igualmente obtenerse de inmediato (Ejercicios 2 y 3). Sea

$$q(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n, \quad a_0 \neq 0,$$
$$p(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m, \quad b_0 \neq 0.$$

Si $n < m$, el gráfico de $q(x)/p(x)$ tiene como asíntota al eje x en ambos sentidos, positivo y negativo. Si $n = m$, el gráfico tiene a la recta $y = a_0/b_0$ como asíntota horizontal en ambos sentidos. Si $n > m$, no hay asíntotas horizontales. Frecuentemente se obtienen otras asíntotas de funciones racionales. (Ejercicio 5). Gracias a estas pocas reglas y a que la función cambia de signo en una asíntota vertical $x = b$ si y sólo si la raíz $x = b$ es de multiplicidad impar en $p(x)$, no es más difícil hacer el gráfico de la función racional $y = q(x)/p(x)$ que el del polinomio $z = p(x) \cdot q(x)$. En realidad, y y z tienen el mismo signo siempre que $z \neq 0$, dado que $z = y\ [p(x)]^2$.

Consideremos el ejemplo

$$y = \frac{(x-2)(x^2-4)(2x-7)}{x(x-1)^2(x+3)}.$$

La curva tiene intersecciones con el eje x en 2, 2, -2, y $\frac{7}{2}$, asíntotas verticales en $x = 0, 1, 1, -3$, y asíntota horizontal $y = 2$. En la Fig. VII - 12 se presenta el aspecto general del gráfico. Se puede lograr un gráfico más exacto por medio del cálculo para ob-

tener los puntos de inflexión o simplemente trazando unos cuantos puntos más.

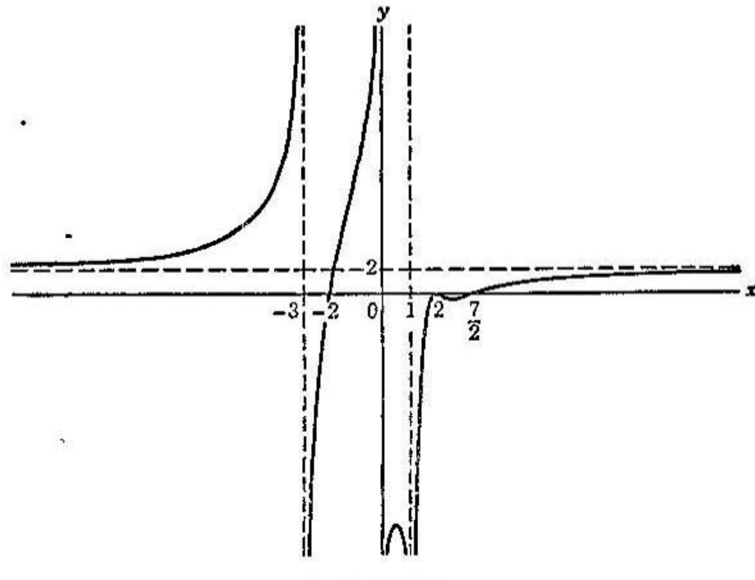


Fig. VII-12

Este método puede emplearse también para hacer el gráfico de funciones de la forma $p(x)t^2 = q(x)$. Considérese primero $p(x)y = q(x)$ y luego hágase $t = \pm\sqrt{y}$. El gráfico en t y x será real solamente para aquellos valores de x correspondientes a valores nulos o positivos de y. Por ejemplo, para trazar el gráfico de la función

$$f(x, t) = x(x - 1)^2(x + 3)t^2 - (x - 2)(x^2 - 4)(2x - 7) = 0,$$

hacemos primero el gráfico de la ecuación correspondiente, en que $y = t^2$, como en el ejemplo anterior. Del gráfico anterior resulta evidente que el gráfico de $f(x, t)$ es real solamente para valores de x en los intervalos $x < -3$, $-2 \leqq x < 0$, $x = 2$, y $7/2 \leqq x$. Luego el punto (2,0) es un punto aislado, la recta $x = -3$ es una asíntota vertical, las rectas $t = \pm\sqrt{2}$ son asíntotas horizontales, y el gráfico de $f(x, t)$ es de la forma que se muestra en la Fig. VII - 13.

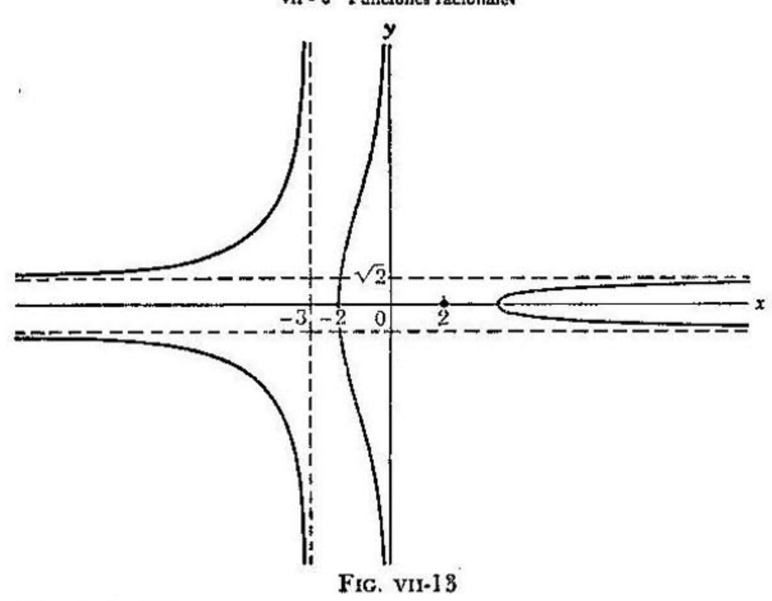


FIG. VII-13

EJERCICIOS:

1. Determinar las intersecciones de las curvas siguientes con los ejes x e y:

(a) $x/a + y/b = 1$,
(b) $y = x^2 - 2x$,
(c) $(x^2 - 4)y = x + 5$,
(d) $x^2y - 2xy - x^2 + x + 6 = 0$,
(e) $(x^2 - 2x - 3)y = x^3 - 2x^2 + x$,
(f) $(x + 1)y^2 = x(x - 2)^2(x - 3)$.

2. Considérese $y = q(x)/p(x)$ en la forma $yp(x) = q(x)$ y examínense las asíntotas horizontales y verticales, valiéndose de los coeficientes de las potencias de mayor grado de las variables.

3. La asíntota horizontal de $y = q(x)/p(x)$ puede determinarse como $y = \lim_{x \to \infty} q(x)/p(x)$ siempre que el límite (finito) exista. Valerse de los métodos del Cap. III-11 para verificar que los enunciados formulados respecto de las asíntotas horizontales en el Ejercicio 2, son válidos también según esta nueva definición.

4. Obtener las asíntotas verticales y horizontales de las curvas del Ejercicio 1, toda vez que existan.

5. Escribir $y = q(x)/p(x)$ en la forma $s(x)/p(x) + r(x)$ en donde el grado de $s(x)$ sea menor que el de $p(x)$ y demostrar que el gráfico de la función racional dada es asintótico con el gráfico del polinomio $y = r(x)$.

VII·7 FUNCIONES ALGEBRAICAS. Una ecuación polinomia $f(x, y) = 0$, en que $f(x,y)$ se considera como un polinomio en y con coeficientes pertenecientes al anillo de los polinomios en x con coeficientes complejos, determina a y como una función algebraica (Cap. III - 16) y tiene como gráfico real una *curva plana algebraica.* El concepto de función algebraica es una ampliación del concepto de polinomio porque todo polinomio $p(x)$ satisface $f(x,y) = y - p(x)$, es decir, un polinomio es un caso especial de una función algebraica que surge cuando $f(x,y)$ tiene la forma $y - p(x)$. Análogamente, una función racional (Cap. VII · 6) es un caso especial de una función algebraica que se origina cuando $f(x,y)$ tiene la forma $p(x)y - q(x)$.

Hemos visto (Cap. III - 10) que cualquier polinomio $p(x)$ es una función uniforme de x. Además, una función racional de x es uniforme siempre que esté definida (Cap. III - 3). Sin embargo, una función algebraica definida por una ecuación polinomia $f(x,y) = 0$ de grado n en y, puede tener n valores de y que corresponden a un valor dado de x. Por ejemplo, $y^2 - x = 0$ tiene asociados dos valores reales de y con cada valor positivo de x. En esta sección nuestro estudio se limitará a una introducción muy breve de una representación gráfica (la superficie de Riemann) de los n valores de la función algebraica y (no necesariamente reales y distintos), que corresponden a cada valor de x (Teorema IV - 2).

A menudo nos hemos referido a un polinomio con coeficientes reales con el nombre de un "polinomio real". En algunos textos se dice que una *curva* es real si la función $f(x,y)$ tiene coeficientes reales. Según esta definición una curva real puede tener sólo puntos imaginarios, como en el caso de $x^2 + y^2 + 1$. Nosotros denominaremos un *gráfico real* de cualquier curva a aquél compuesto de los puntos reales cuyas coordenadas (n-tuplos reales) hacen que la función se anule.

En el Capítulo I, al estudiar nuestro sistema de números, ampliamos el sistema de números racionales y obtuvimos el sistema de números reales con el objeto de conseguir un sistema continuo (sin interrupciones en el eje de los números reales). En seguida ampliamos el sistema de los números reales y obtuvimos el sistema de los números complejos y examinamos la propiedad de todo polinomio de grado n en una sola variable con coeficientes complejos que ten-

gan exactamente n raíces complejas (Teorema IV - 2). Esto significa que el sistema de números complejos es cerrado algebraicamente.

Se puede expresar geométricamente esto mismo en forma análoga, como sigue: se consideró una recta de puntos racionales con el objeto de obtener las raíces de todas las ecuaciones lineales con coeficientes enteros o racionales. Esta recta se amplió para obtener la recta real y asegurarse la continuidad, a saber, que cualquiera curva que una dos puntos situados a los "lados opuestos" de una recta, corte a la recta. Finalmente, la recta real se amplió y se obtuvo el plano complejo con el objeto de representar todas las raíces de cualquier polinomio en una variable con coeficientes complejos.

Geométricamente, se puede hacer una ampliación análoga respecto de los gráficos de las funciones algebraicas. En un espacio de dos coordenadas complejas, la ecuación $y^2 - x = 0$ asocia exactamente dos valores de y con cada valor complejo de x. Estos valores de y son reales y distintos si x es positivo, reales e iguales si $x = 0$, conjugados imaginarios si x es negativo. Es difícil formarse una imagen de este espacio, ya que corresponde a un espacio euclidiano tetradimensional. La variable compleja x está definida esencialmente sobre un plano euclidiano. Los dos valores de y pueden identificarse con dos superficies u hojas $y = +\sqrt{x}$ e $y = -\sqrt{x}$. En esta nueva superficie de dos hojas, denominada la *superficie de Riemann* de la función $y^2 - x = 0$, la función algebraica $y = f(x)$ es uniforme. Las hojas de una superficie de Riemann suelen cruzarse en puntos (denominados puntos de ramificación), ya que en un espacio de cuatro dimensiones, dos planos pueden cortarse en un solo punto. Aun cuando esta propiedad dificulta la formación de una imagen mental al respecto, el concepto de hojas ha resultado ser muy útil.

En general, se asocia con toda función algebraica $y(x)$, definida por una ecuación polinomia $f(x, y) = 0$ de grado n en y, una superficie de Riemann de n hojas en la cual la función es uniforme. La superficie de Riemann es esencialmente el gráfico de la función en un espacio con dos coordenadas complejas. Se pueden estudiar los puntos de la superficie de Riemann en la proximidad a los puntos correspondientes a $x = a$ por medio de desarrollos de series infinitas (Cap. III-11) en una variable t, en que $x = a + t^r$ (Bibliografía Nº 8; pág. 32). Un estudio cabal de este

más bien complicado procedimiento puede consultarse en (Bibliografía Nº 8).

El resto de este capítulo está dedicado a unos cuantos procedimientos prácticos para la construcción de gráficos reales, a la resolución gráfica de ecuaciones algebraicas y a la determinación de ecuaciones empíricas.

EJERCICIOS:

1. Dar tres ejemplos de cada uno de los siguientes tipos de funciones algebraicas de x: a) función polinomia; b) función racional que no sea un polinomio; c) función algebraica, pero que no sea función racional.

2. Indicar el número de hojas en la superficie de Riemann de cada una de las funciones escritas en el Ejercicio 1.

VII-8 TRAZADO DE CURVAS.

El trazado de la curva de una ecuación dada puede efectuarse construyendo la curva mecánicamente, trazando numerosos puntos con cierto grado de precisión o trazando unos pocos puntos seleccionados y determinando la forma de la curva de acuerdo con su simetría, sus puntos singulares y sus asíntotas. Consideraremos brevemente cada uno de estos métodos.

Alfred Bray Kempe resolvió completamente, en teoría, el problema de construir mecánicamente el gráfico real de cualquiera curva plana algebraica $f(x, y) = 0$ de grado n empleando polígonos articulados (Cap. VI-9). En la práctica, estos mecanismos suelen complicarse mucho y hacerse engorrosos a medida que n aumenta. Sin embargo, pueden construirse convenientemente muchas curvas planas corrientes utilizando polígonos articulados. Yates (Bibliografía Nº 54) señala la construcción mecánica de muchas curvas, incluso la cardiode, la cassiniana, la cisoide, las secciones cónicas, la lemniscata de Bernoulli y el caracol de Pascal. Todos empleamos compás para trazar un círculo y, posiblemente, una cuerda enlazada a espigas fijas en los focos para dibujar una elipse. Algunas personas consideran que un pantógrafo (Ejercicio 4, Cap. VI-9) y algunos otros aparatos mecánicos son muy útiles. No obstante, la mayor parte de los métodos mecánicos requiere demasiado equipo y a menudo aparatos muy especiales, para el uso corriente.

El trazado de una curva de grado n por medio de un gran número de puntos puede ser difícil así como tedioso. Las dificultades que se presentan se deben, algebraicamente, a que las raíces de las ecuaciones polinomias de grado n deben aproximarse; y, geométricamente, a que la sucesión de puntos sobre la curva o la asociación de los puntos trazados no es obvia de inmediato. En general, el método de trazar simplemente puntos es más útil en las curvas unicursales (Cap. VII-5).

Existen varios métodos para simplificar el procedimiento de trazar numerosos puntos del gráfico de una curva cuya ecuación $f(x, y) = 0$ es dada. En primer lugar, es fácil trazar los puntos de intersección de la curva con los ejes coordenados y por lo menos corrientemente son tan fáciles de obtener como cualquier otro: las intersecciones con el eje x son los ceros reales de $f(x, 0)$ y las intersecciones con el eje y son los ceros reales de $f(0, y)$. Por ejemplo, $x^2 + y^2 - 5x + y - 6$ tiene $f(x, 0) = x^2 - 5x - 6$, de donde las intersecciones con el eje x son 6 y -1; $f(0, y) = y^2 + y - 6$, de donde las intersecciones con el eje y son 2 y -3.

En segundo lugar, la curva puede ser simétrica respecto de ciertos ejes o puntos, de modo que sólo una parte del gráfico necesita un trazado cuidadoso y el resto puede obtenerse por simetría. Por ejemplo, el gráfico de $y = x^2$ es simétrico respecto del eje y. En general, el gráfico de $f(x, y)$ es simétrico:

al eje x si $f(x, y) = f(x, -y)$,
al eje y si $f(x, y) = f(-x, y)$,
al origen si $f(x, y) = f(-x, -y)$,
y a la recta $y = x$ si $f(x, y) = f(y, x)$.

Se pueden desarrollar pruebas para determinar la simetría respecto de muchos otros ejes y centros (Ejercicio 3), pero las anteriores son las más comunes y las más fáciles de aplicar (Ejercicio 2).

Otro concepto que simplifica el trazado de puntos es el de las regiones excluidas. Frecuentemente, existen conjuntos de valores de una variable para los cuales el gráfico no tiene ningún valor real. Tales conjuntos de valores se denominan *regiones excluidas*. Por ejemplo, el gráfico de $y = x^2$ no tiene ningún punto real para los valores negativos de y; el gráfico de $y^2 = 2x - x^2$ no tiene ningún punto real cuando $x < 0$ ó $2 < x$; el gráfico de la Fig. VII-13

no tiene ningún punto real cuando $-3 \leqq x < -2$, $0 \leqq x < 2$, ó $2 < x < \frac{7}{2}$.

Frecuentemente, es de especial interés el comportamiento de un gráfico en las proximidades del origen o de algún otro punto. Mediante una traslación $x' = x - a$, $y' = y - b$ el comportamiento de cualquier punto (a, b) puede ser estudiado como el comportamiento respecto del nuevo origen. En general, los términos de menor grado determinan el comportamiento de la curva en las proximidades del origen. Dado cualquier polinomio $f(x, y)$, sea $g(x, y) = 0$ la ecuación polinomia que resulta igualando a cero los términos de menor grado de $f(x, y)$. Si $g(x, y)$ es constante y diferente de cero, el gráfico de $f(x, y)$ no pasa por el origen. En todo caso, los términos de $g(x, y)$ son del mismo grado, es decir $g(x, y)$ es un *polimonio homogéneo*. Un polimonio homogéneo de grado r en x e y con coeficientes complejos se puede expresar siempre, teóricamente, como el producto de r polimonios lineales con coeficientes complejos. Los gráficos de los factores lineales de $g(x, y)$ son las tangentes a la curva $f(x, y) = 0$ en el origen. Por ejemplo, si $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy$, en que $a \neq 0$ (Fig. VII-6), entonces $g(x, y) = -3axy$ y las tangentes en el origen son $x = 0$ e $y = 0$. Análogamente, el gráfico de $x^3 + xy^2 + ax^2 - ay^2 = 0$ tiene tangentes $x + y = 0$ y $x - y = 0$ en el origen.

Para hacer el gráfico de las funciones racionales (Cap. VII-6), son muy útiles las asíntotas horizontales y verticales. En general, dado cualquier polinomio $f(x, y)$ de grado n, los términos de grado n y $n - 1$ determinan el comportamiento de la curva en los valores numéricos grandes de las coordenadas. Sea $h(x, y)$ el polinomio homogéneo compuesto por los términos de grado n de $f(x, y)$. Los gráficos reales de los factores lineales de $h(x, y)$ son paralelos a las asíntotas del gráfico de $f(x, y)$. En el ejemplo $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy$ (Fig. VII-6), $h(x, y) = x^3 + y^3$, y la única asíntota es paralela a $x + y = 0$. En general las ecuaciones de las asíntotas dependen de los términos de grados n y $n - 1$ (Bibliografía Nº 27, pág. 13). Si $h(x, y)$ no contiene un término x^n, sea $p(y)$ el coeficiente de la potencia mayor de x en el polinomio original $f(x, y)$. Entonces los gráficos de los factores lineales de $p(y)$ son las asíntotas horizontales de $f(x, y)$. Lo mismo se puede decir respecto de las asíntotas verticales, como se ilustró en el Cap. VII-6 al considerar las funciones racionales en la forma $p(x)y - q(x)$. La teoría

general de las asíntotas incluye el Diagrama de Newton o triángulo analítico (Bibliografía Nº 27, pág. 15).

Hasta aquí hemos estudiado el uso de las intersecciones con los ejes coordenados, de la simetría, de las regiones excluidas, de las tangentes en el origen (o en cualquier otro punto determinado), y de las asíntotas en el trazado del gráfico de un polinomio $f(x, y)$. Los puntos singulares (Cap. VII-5) pueden usarse también en forma efectiva. Frost (Bibliografía Nº 22) y Johnson (Bibliografía Nº 27) tratan este tema en forma elemental y no suponen conocimiento alguno de cálculo. Hilton (Bibliografía Nº 26) aprovecha efizcamente conceptos matemáticos más avanzados. Concluiremos esta sección con un solo ejemplo de los eficaces métodos empleados en textos más avanzados, tales como (Bibliografía Nº 26).

Dado cualquier polinomio $f(x, y)$ de grado n, podemos hacer que cada término del polinomio sea de grado n insertando una potencia adecuada de z y obtener, de este modo, un polinomio homogéneo $f(x, y, z)$. Por ejemplo, si $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$, entonces $f(x, y, z) = x^3 + y^3 - 3xyz$. En seguida, empleamos la notación f_x para indicar la primera derivada parcial respecto de x de $f(x, y, z)$, es decir, la primera derivada de $f(x, y, z)$ con respecto de x, en que y y z se consideran constantes. Análogamente, f_{xy} es la derivada parcial de f_x con respecto de y, etc. En el caso de $f(x, y, z) = x^3 + y^3 - 3xyz$, tenemos

$$\begin{array}{lll} f_x = 3x^2 - 3yz, & f_y = 3y^2 - 3xz, & f_z = -3xy, \\ f_{xx} = 6x, & f_{yy} = 6y, & f_{zz} = 0, \\ f_{xy} = f_{yx} = -3z, & f_{yz} = f_{zy} = -3x; & f_{xz} = f_{zx} = -3y \end{array}$$

El gráfico del determinante de las derivadas parciales de segundo orden de $f(x, y, z)$,

$$H(x, y, z) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{vmatrix},$$

se denomina *el hessiano* de la curva dada (Bibliografía Nº 26, pág. 98). La importancia del hessiano se debe a que las intersecciones de una curva con su hessiano son precisamente los puntos singulares y los puntos de inflexión de la curva dada. Por ejemplo, el hessiano de $x^3 + y^3 - 3xyz$ es el gráfico del polinomio

$$H(x, y, z) = \begin{vmatrix} 6x & -3z & -3y \\ -3z & 6y & -3x \\ -3y & -3x & 0 \end{vmatrix} = -54(x^3 + y^3).$$

Las intersecciones de los gráficos $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ y $H(x, y) = -54(x^3 + y^3)$ deben también encontrarse sobre $54f(x, y) + H(x, y)$ y, por lo tanto, sobre por lo menos uno de los ejes coordenados. En consecuencia, el único punto singular o punto de inflexión del gráfico de $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ se encuentra en el origen (Fig. VII-6).

En esta sección hemos considerado varios métodos de hacer gráficos de curvas planas. No obstante, de ninguna manera hemos agotado el tema, ya que se puede escribir fácilmente la ecuación de una curva plana de grado superior cuyo gráfico no se puede obtener de inmediato por medio de estos métodos. En consecuencia, al reconocer la dificultad de representar gráficamente la mayoría de las curvas planas de grado superior, consideraremos el presente estudio sólo como un breve tratado de los métodos que pueden facilitar la representación gráfica de cualquiera curva plana dada de grado superior, pero no se puede esperar convertir la representación gráfica en una simple rutina. En la sección que sigue estudiaremos unos cuantos tipos especiales de gráficos.

EJERCICIOS

1. Encontrar las intersecciones de las siguientes curvas con el eje x, y con el eje y:

a) $x^2 - 8x + y^2 + 7y + 12 = 0$;
b) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ (Fig. VII-6), folio de Descartes;
c) $x^2y^2 + x^2 - y^4 = 0$;
d) $xy^2 - x - 4y = 0$;
e) $x^2y^2 - x^2 - 4y^2 = 0$;
f) $x^2y + a^2y - a^3 = 0$, curva versiera de Agnesi;
g) $x^3 + xy^2 - 2ay^2 = 0$, cisoide de Diocles;
h) $x^3 + xy^2 + ay^2 - 3ax^2 = 0$ (Fig. VI-5), trisectriz;
i) $x^3 + xy^2 + ax^2 - ay^2 = 0$, estrofoide;
j) $x^2y + b^2y - a^2x = 0$, serpentina;
k) $y^2 = x(x - 1)(x - 2)$;
l) $y^2 = -x^2(x + 1)(x - 2)$.

2. Probar la simetría de cada una de las curvas del Ejercicio 1, con respecto a) al eje x; b) al eje y; c) al origen; d) a la recta $x = y$.

3. Inventar demostraciones para probar la simetría con respecto a cada una de las siguientes rectas: a) $x = 1$; b) $x = a$; c) $y = b$; d) $x - y = 0$.

4. Indicar las regiones excluidas, si existe alguna, respecto de x e y en los gráficos de cada una de las curvas del Ejercicio 1.

5. Encontrar las tangentes en el origen de las curvas siguientes:

(a) $xy^2 = x^3$, (c) $(x + 2)y^2 = x^2(x + 1)$,
(b) $y^2 = x^2(x - 1)$, (d) $xy^2 - x^3 = x^4$.

6. Hallar las tangentes en el origen, si existe alguna, de los gráficos de cada una de las curvas del Ejercicio 1.

7. Discutir el comportamiento de $x^3 + y^3 - 6xy$ en $(3,3)$.

8. Hallar los puntos singulares de cada una de las curvas siguientes empleando el hessiano: a) $x^3 - xy^2 - y^3$; b) $x^3 + xy^2 - x$.

9. Hacer el gráfico de las curvas del Ejercicio 8. [*Indicación:* la curva del Ejercicio 8 (b) es reducible (Cap. VII-9)].

VII - 9 GRAFICOS ESPECIALES. Ahora vamos a estudiar cuatro métodos especiales para hacer gráficos. Estudiaremos los gráficos de curvas reducibles, gráficos que resultan de la composición de ordenadas, gráficos de funciones trascendentes y curva de Peano (curva que llena un área).

Todas las veces que el polinomio $f(x, y)$ puede factorizarse como

$$f(x, y) = g(x, y) \cdot h(x, y),$$

se dice que el gráfico de $f(x, y)$ es *reducible* y comprende a la totalidad de los puntos sobre los gráficos de $g(x, y)$ y $h(x, y)$. Los gráficos de los factores de $f(x, y)$ se denominan *componentes* del gráfico de $f(x, y)$. Por ejemplo, el gráfico de $x^3 + xy^2 - x$ (Ejercicio 8 b), Cap. VII-8) tiene dos componentes correspondientes a los factores x y $x^2 + y^2 - 1$, respectivamente. De esta manera puede obtenerse el gráfico de cualquier curva reducible haciendo el gráfico de cada uno de sus componentes.

La representación gráfica de $f(x, y)$ suele simplificarse a menudo resolviendo la función para una de las variables, como ser, $y = r(x)$, en que $r(x)$ no es necesariamente un polinomio. Por ejemplo,

$$2x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 2,$$

al resolverla respecto de y, resulta:

$$y = x \pm \sqrt{2 - 2x - x^2},$$

que se puede representar gráficamente como $y = y_1 + y_2$, en donde $y_1 = x$, y

$$y_2 = \pm \sqrt{2 - 2x - x^2}$$

ó $(x + 1)^2 + y_2^2 = 3$. Si $f(x, y) = 0$ se resuelve respecto de y, este método de trazar la curva se denomina representación gráfica poi *composición de ordenadas.*

En nuestro estudio nos hemos preocupado principalmente de los gráficos de polinomios. También pueden determinarse gráficos de funciones trascendentes tales como $y =$ sen x o $y = \log_p x$, en que $1 < p$, por medio de varios polinomios:

$$\begin{aligned} y &= -x \text{ si } x < 0, \\ &= 5 \text{ si } x = 0, \\ &= x^2 \text{ si } x > 0, \end{aligned}$$

o por otros símbolos tales como $y = |x|$ o $y = [x]$, donde el x entre paréntesis indica el mayor entero menor que o igual a x. Varias funciones semejantes a éstas se tratan en (Bibliografía Nº 24, págs. 55-60). Es posible aún definir y, por muy equívoco que sea su gráfico, debido a la distancia entre las marcas correspondientes a los puntos trazados. Por ejemplo, supongamos

$$\begin{aligned} y &= 1 \text{ si } x \text{ es racional}, \\ &= 0 \text{ si } x \text{ es irracional}. \end{aligned}$$

Dado que los números racionales son densos y los números irracionales son infinitos (Cap. I-13) en todo segmento (a, b), siendo $a < b$, el gráfico de la función uniforme anterior resulta estar compuesto de dos rectas $y = 0$ e $y = 1$. En el Ejercicio 3, pueden hallarse varios otros ejemplos de gráficos que no pueden darse por un solo polinomio en x y en y.

Concluiremos nuestro estudio sobre el trazado de gráficos refiriéndonos a una curva con propiedades muy excepcionales, el arco de Peano, que llena un área, pues pasa por todos los puntos

interiores de un cuadrado. Se denomina arco porque cada punto de él puede determinarse por un solo valor real del parámetro t, $0 < t < 1$, del mismo modo, que los puntos interiores de un segmento unidad sobre el eje x pueden determinarse por un solo valor real de x, $0 < x < 1$. En (Bibliografía Nº 21, pág. 56) se puede consultar una descripción de la manera en que se asocian los puntos interiores del cuadrado con los valores reales de t, siendo $0 < t < 1$. Este arco tiene importancia en las teorías matemáticas ya que establece una correspondencia biunívoca entre los puntos de un elemento de un área (de dos dimensiones) y los puntos de un segmento de recta (de una dimensión).

EJERCICIOS

1. Trazar los gráficos de:

   (a) $x(x^2 + y^2 - 2x + 2y - 7)$,
   (b) $(x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 1)$,
   (c) $x^3 - x^2y - 2x + 2y$.

2. Representar gráficamente por composición de ordenadas o abscisas:

   (a) $y = x^3 + 1$,
   (b) $x^2 - 4xy + 4y^2 = x - 4$,
   (c) $x^2 + 6xy + 9y^2 + x + 6y + 1 = 0$,
   (d) $y = x + \text{sen } x$.

3. Hacer los gráficos de:

(a) $y = x - [x]$.
(b) $y = |x|$.
(c) $y = -x$ si $x \leqq 0$
$\quad = x$ si $x > 0$.
(d) $y = \sqrt{x}$ si x es el cuadrado de un entero,
$\quad = x$ en todos los demás casos

(e) $y = 1$ si x es racional,
$\quad = -1$ si x es irracional;
(f) $y^2 = |x|$.
(g) $y^2 = x - [x]$.

VII - 10 SOLUCIONES GRAFICAS. Si para obtener la solución de un problema se necesita observar las intersecciones de rectas y curvas sobre un plano, ésta es necesariamente una solución aproximada. No obstante, una solución aproximada

suele ser muy útil. La adición gráfica que sigue es un ejemplo trivial del procedimiento general.

Consideremos la familia F de rectas $x + y = C$ y hagamos un cuadro trazando las rectas correspondientes a valores de C menores en valor absoluto que algún número positivo N. Puede hallarse gráficamente la suma $a + b$ de dos números reales trazando el punto (a, b) y observando el valor particular de C que correspondería a la recta de la familia de rectas F que pasa por (a, b).

Las aplicaciones de los métodos gráficos son muy numerosas. En la Bibliografía Nº 46 se consideran la adición, la sustracción, la multiplicación y división, interés simple y compuesto, resolución de ecuaciones cuadráticas, cúbicas y cuárticas, la integración y la diferenciación. El uso de las curvas en el problema de la trisección se estudió en el Cap. VI-7. Muchas otras aplicaciones de los métodos gráficos pueden consultarse en la Bibliografía Nº 33.

Otra aplicación de las soluciones gráficas se encuentra en las reglas de cálculo y nomogramas. Por ejemplo, en la mayoría de las reglas de cálculo se puede hallar la raíz cuadrada de un número en la escala A mirando directamente debajo de ella (suponiendo que los extremos de las escalas se corresponden) sobre la escala C. La correspondencia entre el número y su raíz cuadrada se puede mirar comúnmente gracias a un hilo cruzado (recta fina y movible perpendicular a las escalas). Por esto, la regla de cálculo es un caso especial de gráfico alineado o nomograma. Muchos nomogramas consisten en tres rectas o curvas situadas con precisión, con escalas (posiblemente muy diferentes en unidades y en significado) marcadas sobre cada una de ellas. El nomograma se usa entonces colocando una reglita sobre puntos en dos de las escalas, según los datos dados, y leyendo el resultado en la tercera escala. Maurice d'Ocagne inventó algunos excelentes nomogramas y desarrolló métodos para resolver ecuaciones en más de dos variables en el plano. Muchos de los procedimientos publicados en libros más recientes se basan sobre el trabajo de d'Ocagne. Para pormenores respecto de la construcción y uso de nomogramas se remite al lector a textos especiales sobre la materia. Concluiremos nuestro estudio de las representaciones gráficas con una breve discusión del problema de hallar una ecuación o curva que corresponda a un conjunto dado de puntos.

EJERCICIOS

1. Dibujar gráficos que puedan servir para aproximar cada uno de los siguientes, siendo $0 \leqq b \leqq 10$:

(a) $\sqrt{b}$,	(c) $\sqrt[4]{b}$,	(e) $\sqrt{b+3}$,
(b) $b^2 + 1$,	(d) $b^{\frac{3}{2}}$,	(f) $\sqrt{b} + 3$.

2. Dibujar varias curvas de una familia de curvas que sirvan para aproximar cada una de las siguientes:

(a) $a + b$,	(c) ab,	(e) $a^2 + 2ab + b^2$.
(b) $a - b$,	(d) a/b,	

3. Resolver gráficamente los siguientes sistemas de ecuaciones y desigualdades:

(a) $y = x$, $y < x^2$, $y^2 > x$.

(b) $1 - y^2 > x^2$, $0 < x < y$.

(c) $\sin x < y \leqq 1$, $|x| < 3$.

(d) $1/x > 1/y$, $x^2 + y^2 = 25$.

VII-11 DETERMINACION DE CURVAS.

Hasta aquí hemos trazado curvas de ecuaciones dadas. En esta sección, supondremos que se da un conjunto de valores correspondientes a dos variables y procuraremos encontrar la ecuación entre las dos variables que mejor convenga a los datos dados y a las condiciones del problema. A menudo los datos se han obtenido por medio de la observación o de la experimentación y al formar una ecuación entre las variables se puede lograr una mejor comprensión del problema.

Siempre es posible hallar una curva de grado menor o igual a $n - 1$ que pase por n puntos dados. Sin embargo, puede ocurrir que nuevos conjuntos de valores del gráfico no se aproximen a los nuevos valores correspondientes del problema. Nos referiremos a algunos métodos para determinar una ecuación, denominada *ecuación empírica,* que se satisfaga aproximadamente con los datos dados. Por ser la línea recta la curva cuya imagen se capta más fácilmente, la consideraremos en varios tipos de escalas coordenadas. Para medir si una ecuación empírica es adecuada o no se suele

utilizar promedios o el método de los cuadrados menores, es decir, se reduce al mínimo la suma de los cuadrados de las diferencias entre los resultados de los datos dados y aquellos que se desprenden de la ecuación. El tema de la determinación de curvas a partir de datos dados entre las variables se estudia en muchos textos de geometría analítica, por ejemplo, en (Bibliografía Nº 38, págs. 204-223). Se pueden consultar estudios más completos sobre esta materia en Bibliogría Nº 14, págs. 3-88; Nº 33, págs. 120-169.

El gráfico de $y = ax + b$ en papel corriente para gráficos es una línea recta con pendiente a y que corta al eje y en b. A la inversa, cada vez que los puntos correspondientes a los datos dados parecen encontrarse sobre una línea recta en papel corriente para gráficos, ellos pueden satisfacer (mediante un cambio de coordenadas si la recta es paralela al eje y) muy aproximadamente una ecuación de la forma $y = ax + b$. Las constantes a y b pueden calcularse fácilmente basándose sobre los datos dados o en el gráfico de la recta.

El método de los promedios se aplica a la relación lineal $y = ax + b$, como sigue: Por ejemplo, los pares dados de valores

x	1	2	3	4	5	6	7
y	3.20	4.30	4.80	6.10	7.00	8.20	9.10

se dividen en dos conjuntos (dado que hay que determinar dos constantes) aproximadamente iguales en número. Por ejemplo, tomemos los primeros tres y los últimos cuatro pares de datos anteriores. En la relación lineal se sustituyen los pares de cada conjunto y obtenemos las *ecuaciones aproximadas*

$$\begin{aligned} 3.2 &= a + b, & 6.1 &= 4a + b,\\ 4.3 &= 2a + b, & 7.0 &= 5a + b,\\ 4.8 &= 3a + b, & 8.2 &= 6a + b,\\ & & 9.1 &= 7a + b; \end{aligned}$$

Los elementos de cada conjunto se suman

$$12.3 = 6a + 3b, \quad 30.4 = 22a + 4b,$$

y las dos ecuaciones que resultan se resuelven simultáneamente para $a = 1$ y $b = 2.1$ para obtener la ecuación empírica $y = x + 2.1$. También puede usarse el método de los promedios para adecuar una parábola $y = ax^2 + bx + c$ a partir de los datos dividiendo los pares de valores en tres conjuntos y resolviendo las

tres ecuaciones lineales resultantes respecto de tres parámetros *a*, *b*, *c*.

Cuando se aplica el método de los cuadrados menores a la ecuación lineal $y = ax + b$ determina principalmente valores de *a* y *b* tales que

$$D = \sum_{j=1}^{n} (ax_j + b - y_j)^2$$

es un mínimo donde hay *n* pares de valores (x_j, y_j), $j = 1, 2, \ldots, n$, en los datos dados. Esto se puede hacer resolviendo las dos ecuaciones lineales diferenciales $\delta D/\delta a = 0$, $\delta D/\delta b = 0$ simultáneamente para *a* y *b*. También se puede hacer (Bibliografía Nº 38; págs. 219-222) resolviendo simultáneamente las ecuaciones

$$\sum y_j = a \sum x_j + nb,$$
$$\sum x_j y_j = a \sum x_j^2 + b \sum x_j.$$

Si las ecuaciones aproximadas $y_j = ax_j + b$ forman una columna y las $x_j y_j = ax_j^2 + bx_j$ otra, resulta para el ejemplo anterior

$3.2 = a + b$	$3.2 = a + b$
$4.3 = 2a + b$	$8.6 = 4a + 2b$
$4.8 = 3a + b$	$14.4 = 9a + 3b$
$6.1 = 4a + b$	$24.4 = 16a + 4b$
$7. = 5a + b$	$35. = 25a + 5b$
$8.2 = 6a + b$	$49.2 = 36a + 6b$
$9.1 = 7a + b$	$63.7 = 49a + 7b$
$42.7 = 28a + 7b$	$198.5 = 140a + 28b$

de donde $a = 0.99$ y $b = 2.14$, y resulta la ecuación empírica $y = 0.99x + 2.14$. Es obvio, que estos métodos se pueden aplicar con ligeras modificaciones a las relaciones lineales $\log y = a \log x + \log b$ y $\log y = ax + b$, la que acabamos de considerar.

La ecuación $y = bx^a$ es equivalente a $\log y = a \log x + \log b$ que es lineal en $\log y$ y en $\log x$. En consecuencia, se emplea papel logarítmico, donde las distancias Ox y Oy representan los logaritmos de *x* y de *y* respectivamente, en vez de sus magnitudes. Siempre que los puntos correspondeintes a los datos dados se presenten sobre una línea recta en el papel logarítmico, ellos pueden satisfacer aproximadamente una ecuación de la forma $y = bx^a$

y las constantes pueden determinarse fácilmente por medio del gráfico. Este método se puede hacer extensivo a $y = bx^a + c$ considerándola en la forma $\log (y - c) = a \log x + \log b$. El valor de c puede calcularse por ensayo y error o gráficamente (Bibliografía Nº 14; pág. 12).

Hacemos notar también que $y = 10^{b+ax} + c$ puede considerarse en la forma $\log (y - c) = ax + b$ como un gráfico lineal en papel semilogarítmico. Finalmente, cuando la razón de cambio de una variable con respecto a la otra es lineal, tenemos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2ax + b$$

y las variables pueden relacionarse por medio de

$$\frac{dy}{dx} = 2ax + b \quad \text{or} \quad y = ax^2 + bx + c.$$

Si los recíprocos de x e y están relacionados linealmente, es decir,

$$\frac{1}{y} = \frac{b}{x} + a,$$

entonces

$$y = \frac{x}{ax + b}.$$

Hay otros tipos comunes de ecuaciones empíricas, pero las anteriores dan a conocer uno de los usos de los diferentes papeles coordenados y algunas de las ventajas de los métodos gráficos. Un estudio más amplio de las ecuaciones empíricas puede consultarse en (Bibliografía Nº 14) y en muchos textos sobre estadística.

EJERCICIOS

1. Por medio del método de los promedios hallar una ecuación de la forma $y = ax + b$ que se satisfaga aproximadamente con los siguientes datos:

x	1	2	3	5	10	12
y	2.2	4.3	6.5	11	21	24

2. Trazar los puntos dados sobre la recta que se obtuvo en el Ejercicio 1.

3. Hallar una ecuación de la forma $y = ax^2 + bx + c$ para los datos dados en el Ejercicio 1.

VII - 12 CONCLUSION. En este capítulo hemos considerado las relaciones entre los gráficos y las ecuaciones. Desde la Sección 1 hasta la Sección 10 nuestro interés principal residió en obtener el gráfico de una función dada; en la Sección 11 nos preocupamos de hallar una ecuación de cierto tipo valiéndonos de la curva que mejor se ajustara en los puntos ocrrespondientes a ciertos datos dados. Estas consideraciones ilustran la importancia de las relaciones entre los conceptos fundamentales de álgebra y los conceptos fundamentales de geometría. En particular, hemos visto que muchos problemas algebraicos pueden expresarse geométricamente y, análogamente, muchos problemas geométricos (por ejemplo, las construcciones clásicas del Cap. VI) pueden expresarse algebraicamente. Como se puede ver, un estudio de los conceptos básicos de cualquiera rama de las matemáticas, y en particular nuestro estudio de los conceptos fundamentales de álgebra, en este texto, amplían nuestro conocimiento de todos los aspectos de las matemáticas.

Bibliografía

1. ALBERT, A. A., *College Algebra.* New York: McGraw-Hill, 1946.
2. ARCHIBALD, R. C. "Outline of the History of Mathematics", 6ª ed., *American Mathematical Monthly, 56,* Part II, 1949.
3. BALL, W. W. R., *Mathematical Recreations and Essays.* 11ª ed., revisada por H. S. M. Coxeter. New York: Macmillan, 1939.
4. BERGER, E. J. "Devices for a Mathematical Laboratory", *The Mathematics Teacher, 44,* 34, 1951.
5. BERGER, E. J., "Devices for a Mathematical Laboratory", *The Mathematics Teacher, 45,* 287, 1952.
6. BIRKHOFF, G. D. and BEATLEY, R., *Basic Geometry.* Chicago: Scott, Foresman and Co., 1940.
7. BIRKHOFF, G. and MACLANE, S., *A Survey of Modern Algebra.* New York: Macmillan, 1941.
8. BLISS, G. A., *Algebraic Functions.* Colloquium Publications, Vol. 16. New York: American Mathematical Society, 1933.
9. BÔCHER, MAXIME, *Introduction to Higher Algebra.* New York: Macmillan, 1907.
10. BOURBAKI, NICHOLAS, "The Architecture of Mathematics", *American Mathematical Monthly, 57,* 221-232, 1950.
11. COOLIDGE, J. L., *A History of the Conic Sections and Quadric Surfaces.* Oxford: Clarendon Press, 1945.
12. COURANT, R., *Differential and Integral Calculus.* Vol. I. E. J. McShane, traductor. New York: Nordemann Publishing Co., Inc., 1938.
13. COURANT, R. and ROBBINS, H., *What is Mathematics?* New York: Oxford University Press, 1941.
14. DAVIS, D. S., *Empirical Equations and Nomography.* New York: McGraw-Hill, 1943.
15. DICKSON, L. E., "Constructions with Ruler and Compasses", *Monographs on Topics of Modern Mathematics.* J. W. A. Young, Editor. New York: Longmans, Green and Co., 1911, pp. 351-386.
16. DRESDEN, ARNOLD, *Solid Analytical Geometry and Determinants.* New York: Wiley, 1930.
17. DUBISCH, ROY, *The Nature of Number.* New York: Ronald Press, 1952.

18. EISENHART, L. P., *Coordinate Geometry*. Boston: Ginn, 1939.

19. FINE, H. B., *College Algebra*. Boston: Ginn, 1904.

20. FOURREY, E., *Procédés Originaux de Constructions Géométriques*. Paris: Libraire Vuibert, 1924.

21. FRANKLIN, PHILIP, *A Treatise on Advanced Calculus*. New York: Wiley, 1940.

22. FROST, PERCIVAL, *An Elementary Treatise on Curve Tracing*. 2ª ed. London: Macmillan, 1911.

23. GANGULI, SURENDRAMOHAN, *Lectures on the Theory of Plane Curves*. Parts I and II. Calcutta: University of Calcutta, 1919.

24. HARDY, G. H., *A Course of Pure Mathematics*. 9ª ed. Cambridge: University Press, 1945.

25. HILSENRATH, JOSEPH, "Linkages", *The Mathematics Teacher, 30*, 277-284, 1937

26. HILTON, HAROLD, *Plane Algebraic Curves*. 2ª ed. London: Oxford University Press, 1932.

27. JOHNSON, W. W., *Curve Tracing in Cartesian Coordinates*. New York, Wiley, 1884.

28. KAMKE, E., *Theory of Sets*. F. Bagemihl, traductor. New York: Dover, 1950.

29. KASNER, E. and NEWMAN, J., *Mathematics and the Imagination*. New York: Simon and Schuster, 1940.

30. KLEIN, FELIX, *Famous Problems of Elementary Geometry*. W. W. Beman and D. E. Smith, traductores. Boston: Ginn, 1897.

31. LANDAU, EDMUND, *Foundations of Analysis*. F. Steinhardt, traductor. New York: Chelsea, 1951.

32. LIEBER, L. R. and LIEBER, H. G., *Galois and the Theory of Groups*. Lancaster, Pa.: Science Press, 1932.

33. LIPKA, JOSEPH, *Graphical and Mechanical Computations*. New York: Wiley, 1918.

34. McCOY, NEAL H., *Rings and Ideals*. Carus Mathematical Monograph, Nº 8. Buffalo, N. Y.: Mathematical Association of America, 1948.

35. MESERVE, B. E., *Fundamental Concepts of Geometry*. Cambridge, Mass.: Addison-Wesley, 1953.

36. MESERVE, B. E., "Linkages as Visual Aids", *The Mathematics Teacher, 39*, 372-379, 1946.

37. MESERVE, B. E., "The Euclidean Division Algorithm", *Pi Mu Epsilon Journal, 1*, 138-144.

38. MIDDLEMISS, R. R., *Analytic Geometry*. New YORK: McGraw-Hill, 1945.

39. MUIR, THOMAS, *The Theory of Determinants in the Historical Order of Development*. 4 vols. London: Macmillan, 1906, 1911, 1920, 1923.

40. NAGELL, TRYGVE, *Introduction to Number Theory*. New York: Wiley, 1951.

41. NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS, *Multi-Sensory Aids in the Teaching of Mathematics*. 18th yearbook. New York: Columbia University, 1945.

42. OCAGNE, MAURICE DE, *Traité de Nomographie*. Paris: Gauthier-Villars, 1899.

43. ORE, OYSTEIN, *Number Theory and Its History*. New York: McGraw-Hill, 1948.

44. PERLIS, S., *Theory of Matrices*. Cambridge, Mass.: Addison-Wesley Press, 1952.

45. ROOS, J. D. C. DE, *Linkages: the Different Forms and Uses of Articulated Links*. New York: D. Van Nostrand, 1879.

46. RUNNING, T. R., *Graphical Mathematics*. New York: Wiley, 1927.

47. THOMAS, J. M., *Theory of Equations*. New York: McGraw-Hill, 1938.

48. THOMAS, J. M., "Sturm's Theorem for Multiple Roots", *National Mathematics Magazine, 15,* 391-394, 1941.

49. USPENSKY, J. V., *Theory of Equations*. New York: McGraw-Hill, 1948.

50. USPENSKY, J. V. and HEASLET, M. A., *Elementary Number Theory*. New York: McGraw-Hill, 1939.

51. VANDIVER, H. S., "Fermat's Last Theorem, Its History and the Nature of Known Results Concerning It", *American Mathematical Monthly, 53,* 555-578, 1946.

52. VEBLEN, OSWALD and YOUNG, J. W., *Projective Geometry*, Vol. 2 Boston: Ginn, 1918.

53. WAERDEN, B. L. VAN DER, *Modern Algebra*, Vol. I, Fred Blum, traductor. New York: Ungar, 1949.

54. YATES, R. C., *Curves*. New York: Department of Mathematics, United States Military Academy, 1946.

55. YATES, R. C., *The Trisection Problem*. Baton Rouge. Franklin Press, 1942.

Indice alfabético

D

R

S

Símbolos y Notación

Los símbolos y notación siguientes aparecen por primera vez y se definen en las páginas que se indican a la izquierda.